Enseñanza - Aprendizaje de la Matemática

PROPUESTA PARA QUE NADIE SE FRUSTRE

José Adolfo Araujo Romagoza

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE EL SALVADOR

ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

PROPUESTA PARA QUE NADIE SE FRUSTRE

José Adolfo Araujo Romagoza

AGRADECIMIENTOS

Deseo dar un agradecimiento sincero a todos aquellos que han ayudado a este movimiento por una enseñanza de la Matemática más útil, real, motivante y que no frustre ni a los docentes, ni a los estudiantes. En este proceso de elaboración se han incorporado todas las observaciones y sugerencias recibidas y estimo que sin esta colaboración esta referencia bibliográfica no hubiese sido posible.

A los revisores del material Noel Castro, Braulio Galdámez, Adbélica Luna, Ramón Rivas, Roberto Edmundo Viera, Fredy Hernández, Genaro Hernández, Ramiro Puente, Mario Rodríguez Abud, William Genet Barberena, Jesús Marco Soriano.

Al Rector magnífico de la Universidad Tecnológica José Mauricio Loucel, quien me impulso a realizar este proyecto, a mi hijo Adolfo José Araujo Jaimes quien me aporto buenos comentarios, a mis colaboradoras Roxana Landaverde, Aminta Hernández y al los diagramadores de Tecnoimpresos: Carolina de Inclán y Evelyn Reyes.

A todos ellos por sus contribuciones, GRACIAS; los profesores y docentes, así como los estudiantes de Matemática se lo agradecemos.

510
A663e Araujo Romagoza, José Adolfo
Enseñanza-aprendizaje de la matemática : propuesta para que nadie
sv se frustre / José Adolfo Araujo Romagoza. -- 1a. ed. -- San Salvador,
El Salv. : Universidad Tecnológica de El Salvador, 2008.
71 p. : il. ; 24 cm.

ISBN 978-99923-21-46-1

1. Matemáticas-Estudio y enseñanza. 2. Matemática-Enseñanza. 3.
Filosofía de las matemáticas. I. Título.

BINA/jmh

Enseñanza-aprendizaje de la matemática
propuesta para nadie se frustre
500 ejemplares
Mayo, 2008

Impreso en El Salvador
por Tecnoimpresos, S.A. de C.V.
19 Av. Norte No. 125, San Salvador.
Tel.: (503) 2275-8861 • e-mail: gcomercial@utec.edu.sv

PRÓLOGO

Las experiencias que viven los estudiantes en las instituciones de todos los niveles del sistema educativo son determinantes de su vida individual, familiar y social. Con los productos de esas experiencias (aprendizajes, capacidades, competencias) y los que adquieren en la diversidad de ambientes donde interactúan, enfrentan la vida, las demandas de la sociedad y del mundo laboral; con esas capacidades que les desarrolla el sistema educativo, responderán a la demanda que plantea la globalización, entre las cuales el aprender a aprender, la creatividad, el trabajo en equipo, el liderazgo, la solución de problemas, la responsabilidad, el dominio de otro idioma, la ética y el manejo adecuado de las nuevas tecnologías de la comunicación y la información, son sólo algunas.

¿Están preparando las escuelas de todos los niveles educativos al hombre y a la mujer que demanda la sociedad, para impulsar su desarrollo económico, político, social, cultural y espiritual?

¿Asisten los educandos a la escuela por el verdadero interés de aprender, de mejorar su calidad de vida, de prepararse para un futuro que cada vez es más cercano y que demanda una diversidad de competencias generales y específicas de alto nivel?

¿Qué experiencias están ofreciendo las instituciones educativas? ¿Qué experiencias estamos orientando los profesores para que nuestros alumnos alcancen niveles apropiados de desarrollo cognoscitivo, psicomotor y socioafectivo? ¿Estamos formando o informando? ¿Estamos ofreciendo educación o solamente instrucción? ¿Estamos facilitando aprendizajes o simplemente dando información para que el día del examen la repitan los estudiantes?

¿Qué tanto aman los estudiantes el aprendizaje de las ciencias como para que se conviertan en inventores, creadores de nuevos conocimientos y tecnologías que impulsen el desarrollo? El Dr.H.C. E Ing. José Adolfo Araujo Romagoza ha mostrado su preocupación por la calidad de la educación que ofrecen las instituciones educativas; especialmente por el rol que juegan el profesor y el estudiante en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto lo podemos comprobar en todas sus publicaciones, conversaciones y en la conducción de las clases que imparte.

En la presente obra, el Ing. Araujo muestra su gran preocupación por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y es que conoce las frustración de muchos estudiantes que, teniendo vocación para cursar y tener éxito en una carrera, estudian otra que no comprende el estudio de la matemática, auque no les guste; también la de otros que truncan sus estudios porque reprueban las asignaturas que tienen aplicación de la matemática. Esto se da porque desde su educación básica les desarrollan aversión (actitud negativa) hacia la misma, ya sea porque al profesor o profesora no le gusta la matemática, porque no la enseñan con la metodología apropiada y/o porque no la vinculan con la vida, con la realidad, para tenga sentido, para que responda a una necesidad y por ello los estudiantes se ven obligados a aprender para obtener una nota que signifique "aprobado", pero no porque les gusta o porque estén convencidos de la utilidad que tiene la misma en su proceso de formación y en su futuro desempeño profesional.

Pero el Ing. Araujo no se conforma con señalar el problema, su formación y su vasta experiencia educativa lo impulsan a proponer estrategias metodológicas que orientan al docente para facilitar el aprendizaje de la matemática.

Se necesita tener suficiente amor por la humanidad, por la sociedad, por la familia y por cada individuo, para dedicarse a evaluar su desarrollo e invertir parte de su vida a proponer alternativas que contribuyan a mejorar significativamente la calidad de la educación, que es uno de los factores más importantes del desarrollo. Esto es lo que está haciendo el Ing. Araujo. Nos queda a los docentes la responsabilidad de hacer nuestras las preocupaciones de él, de profundizar en el conocimiento de la problemática educativa y de participar consciente y responsablemente en la puesta en práctica de estrategias metodológicas que contribuyan a una educación que motive a aprender a lo largo de toda la vida, a amar la ciencia y a la humanidad, para que todo lo que hagamos sea de edificación.

Lic. Jesús Marcos Soriano Aguilar.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática ha sido un problema para todo profesor o docente responsable de lograr que los estudiantes la aprendan. El propósito de este estudio es proponer algunas ideas, conceptos, técnicas y prácticas didácticas que han sido probadas por profesores exitosos de matemática, de tal manera que puedan aplicarse agradablemente en su enseñanza-aprendizaje.

El estudio comienza con algunas definiciones y antecedentes sobre el origen, desarrollo y estado actual de los movimientos y enfoques de la enseñanza de la matemática. Se continúa, realizando un diagnóstico cualitativo sobre las apreciaciones y opiniones de estudiantes, profesores y de la sociedad en general, acerca del porqué resulta tan difícil enseñar y aprender matemática en los diferentes niveles educativos, exponiendo esta situación mediante un gráfico de causas que originan algunas consecuencias, las cuales se derivan de los problemas primarios y que, agrandados, ampliados o multiplicados por las estructuras vigentes educativas, ocasionan frustraciones (de profesores y estudiantes), odios, abandonos, deserciones, rechazos y aversión al aprendizaje de la matemática en general y de su respectiva enseñanza.

Posteriormente, se plantea una propuesta para retomar una mejor dirección en la enseñanza y los principios de esta ciencia que nos ayuda a resolver problemas, a pensar, imaginar, analizar y sintetizar ideas científicas recurriendo a una didáctica para la matemática, que puede ser útil tanto para los profesores y docentes, así como para los mismos estudiantes, y en la que se persiga un aprendizaje armónico y no frustrante. En este sentido, se presentan algunas ideas validadas por investigadores en esta rama, así como algunos principios didácticos generales que han dado resultado, y se complementan con algunas estrategias para mejorar sustantivamente las sesiones de estudio, la utilización de los recursos modernos y la inclusión de la tecnología de la información en el proceso de aprendizaje. Se concluye apuntando las ideas de base encontradas y recomendando profundizar el estudio en cada nivel educativo, para fortalecer y mejorar la enseñanza de la matemática realista en todos sus más importantes aspectos como son la matematización, la modelización y el método de resolución de problemas.

Si la enseñanza-aprendizaje de la matemática no se mejora, de nada servirán máquinas electrónicas más rápidas y poderosas para lograr un desarrollo científico y tecnológico; simplemente el desarrollo no se alcanzará, y el futuro será para maquiladores de datos y no de profesionales innovadores y creadores de valor. Por otra parte, la fuga de estudiantes hacia otras áreas menos productivas continuará por una deficiente y tradicional forma de enseñar a comprender a la "reina de las ciencias". Esta propuesta es una llamada de atención para todos los niveles educativos, es un intento para iniciar un movimiento para mejorar la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos, es una propuesta para dejar de frustrar a los estudiantes, niños y maestros de matemática, mediante la respuesta a la pregunta de siempre: matemática ¿para qué?

II ANTECEDENTES DE LA INFINITUD

La palabra matemática viene del griego mathema=ciencia, conocimiento, aprendizaje, y mathematikós, que es "la amante del conocimiento". Estudia las cantidades, las formas y sus relaciones, así como su evolución en el tiempo. Las cantidades surgen quizás de la necesidad de contar objetos, y de las mismas cantidades y sus relaciones, sus iconos, símbolos y números. Se estima que la acción primera de contar comenzó con el uso de los nueve primeros números se les llamo dígitos. Del latín digitus que significa dedo y luego contando con piedras. De hecho, calcular viene del latín cálculus, que significa contar con piedras. El conjunto de números enteros positivos 1, 2, 3, 4... probablemente debe haber sido conocido en los orígenes de la humanidad; pocos números quizás hasta los 10 dedos, pero la gran necesidad, por ejemplo, de contar cosechas, aves, tierras, estrellas etc., hizo que se fueran ampliando hasta el infinito.

Cada número tuvo que ser representado por un icono o símbolo, y cada civilización contó con un sistema de numeración diferente.

El desarrollo de la matemática [1] *tuvo su origen inicial en la civilización egipcia (evidenciados en fragmentos de papiro). El sistema de numeración jeroglífico consistía en denominar los números clave con un símbolo. Posteriormente, los romanos crearon un sistema similar. La civilización del Nilo inventó las fracciones de la forma 1/n, los primeros métodos de operaciones matemáticas para adiciones a enteros y fracciones y, además, comenzaron a resolver las primeras ecuaciones de la forma x+ax=b. En Egipto se avanzó mucho en la geometría y en el cálculo de áreas y volúmenes.

[2] *En Mesopotamia (entre el Tigris y el Éufratres) en 2000 a.C. hasta el año 200 a.C., en las tablillas de arcilla (escritura cuneiforme) existen 250 contenidos matemáticos, con problemas concretos y casos especiales.

Los habitantes del "oriente próximo" utilizaron el sistema de numeración posicional sexagesimal (sin el cero). Establecieron las aproximaciones decimales, desarrollaron nuevos algoritmos que fueron utilizados posteriormente. Se estima que esta civilización fue superior a la egipcia por sus aportes a la matemática.

La civilización china, que es de la misma época, aporta la primera obra matemática: El Chou Pei (horas solares), en el 1200 a.C., y la matemática de los nueve libros o capítulos. Estos son pergaminos independientes con 246 problemas prácticos, concretando cuestiones de agricultura, ingeniería, impuestos y las propiedades de los triángulos rectángulos. Utilizaron el sistema decimal jeroglífico. Su contribución más importante fue sobre ecuaciones lineales. Los chinos inventaron el tablero de cálculo que consistía en una colección de palillos de bambú de dos colores, un color para números positivos y otro para los negativos, que es considerado como el ábaco primitivo.

En la India antigua, se encuentran evidencias de aplicaciones geométricas para la construcción de edificios, utilizando un sistema de numeración posicional y decimal. Predominaron en esta cultura las reglas aritméticas de cálculo, la utilización de los números negativos, la introducción del cero y los números irracionales. Por otra parte, en Grecia se desarrolló un imperio cuya influencia ha perdurado gracias a la matemática. Varias escuelas surgen con énfasis en problemas prácticos relacionados con el cálculo aritmético, mediciones y construcciones geométricas. Nacieron en Grecia la lógica y las operaciones con números conducentes a resolver problemas de arquitectura, geometría y agrimensura. Basta mencionar a Pitágoras, Tales de Mileto y Euclides para estimar el apogeo matemático, el mundo de la abstracción y la sistematización, así como el nacimiento de la teoría matemática. En Grecia se desarrolló la matemática como ciencia.

Cabe mencionar también que, en América, los mayas que se extendieron desde el sur de México hasta parte de El Salvador, desarrollaron una civilización comparable a la griega (ciudades-estados), y fueron grandes científicos, en lo concerniente a la matemática, la astronomía, la agricultura, la arquitectura, la ingeniería, logrando descubrir la categoría matemática del cero casi al mismo tiempo que ésta fue descubierta en la India, y después trasladada a los árabes. Sus previsiones astronómicas basadas en cálculos matemáticos y observaciones científicas son asombrosas todavía hoy en día.*[3] El avance de la matemática pura se ha desarrollado cada vez más y como un ejemplo de lo más notable en el avance de la matemática en (1999), es la estrategia de Wiles y la prueba de la conjetura de Tanixama-Shimura-Weil para todas las curvas elípticas matemáticas de Brenil, Conrad, Diamond y Taylor.*[4]

Estos avances son creaciones sumamente abstractas que expresan el más puro estado de la ciencia y, para tener una idea de su complejidad, se tiene por ejemplo, el principio y fin de la demostración del siguiente teorema, con el propósito simple de tener una idea del avance de la ciencia como tal y su gran complejidad actual.

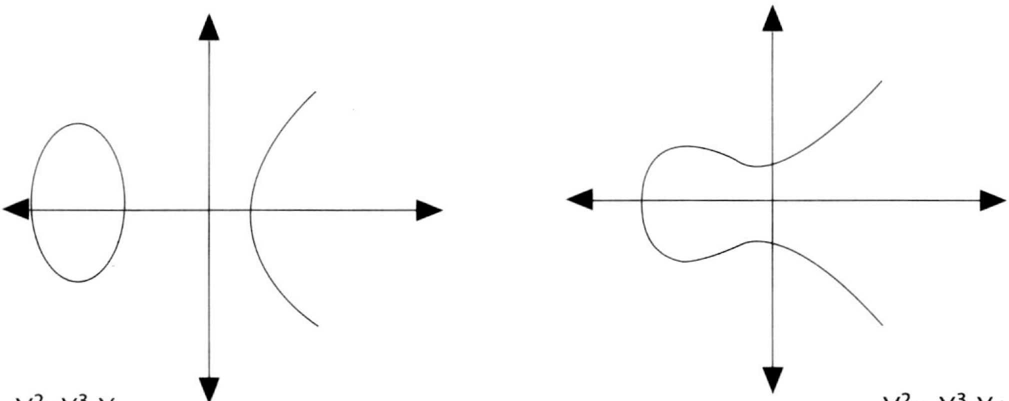
[5] ***Teorema A.7**

Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de género g sobre un cuerpo de constantes exacto k de q elementos. Supongamos que q es una potencia par de la característica p y que $(g + 1)^4 < q$. Supongamos asimismo que existe $x \in K$ tal que $K/k(x)$ es separable y la clausura normal L de $k(x)$ sobre K tiene a k como cuerpo de constantes exacto. Entonces K cumple la hipótesis de Riemann.

Sigue el desarrollo de la demostración hasta llegar a lo siguiente:

Para terminar la demostración sólo hemos de ver que todo cuerpo K tiene una extensión finita de constantes, que satisface las hipótesis del teorema anterior. Ahora bien, para cada $n \geq 1$, llamemos k_n a la extensión de grado n de k. Tomemos n suficientemente grande para que $(g + 1)^4 < q^n$. Podemos elegir n par y así q^n es una potencia par de p. Existe $x \in k_n K$ tal que $k_n K/k_n(x)$ es separable. Sea L la clausura normal de $k_n(x)$ sobre K y sea k_m el cuerpo de

constantes exacto de L. Entonces n/m, luego q^n sigue siendo una potencia par de p y es claro que L sigue siendo la clausura normal de k_m (x) sobre k m K.
Así pues, k_m K cumple el teorema anterior y esto termina la prueba.



$Y^2=X^3-X$ $\qquad$ $Y^2= X^3-X+1$

Fig. 1.

La complejidad del teorema anterior, es sólo para señalar que el estado del arte es complejo aun para los entendidos; pero, como casi siempre, al final hay, la mayoría de veces, un mundo real. Es indudable que la matemática nació como ayuda al ser humano en sus relaciones con la naturaleza y para aplicaciones prácticas y cotidianas. Actualmente es considerada por algunos matemáticos, no sólo como una ciencia natural, sino una ciencia abstracta, formada por estructuras y conceptos con finalidades en sí mismos, es decir, para la misma matemática, tal como si se dijese que ésta es un fin en sí misma, y una ciencia que crea ciencia para sí misma y frecuentemente para algunas otras ciencias como la física, la astronomía, incluso, la economía.

Muchos matemáticos creen que es un arte, tal y como ocurre en otras ciencias. Es posible que lo que ocurre es que, en su misma evolución, se ha ido olvidando el origen, cediendo su utilidad en aras de su elegancia y perfección, así como a la búsqueda de su automejoramiento. En todo caso, como se sustenta más adelante, una cosa es "ser matemático", "hacer matemática", y otra muy distinta es enseñar o pensar en forma matemática para la vida real.

Por otra parte, aprender matemática puede incluir, si se dejan la forma, la rutina y la tradición, el descubrir, modelar y resolver problemas consciente y alegremente. Cabe aquí relatar un cuento árabe, en el cual siete jóvenes: música, escultura, arquitectura, pintura, dialéctica, retórica y filosofía son auxiliadas en el desierto por una princesa (madre de todas), la cual es nada menos que la matemática que apoya a todas las ciencias e incluso es llamada "reina de las ciencias". Para algunos no es una ciencia natural, para otros es un arte, otros más la consideran que no es aplicada, pero el origen de muchos problemas es natural y éstos les interesan resolverlos a los humanos, en cualquiera de las diferentes realidades existentes en el mundo.

Por el lado latino, se tiene el origen: mathema= conocimiento, estudio. La etimología confunde siempre la definición apropiada de la ciencia matemática. Sus enunciados van desde matematike y la mencionada anteriormente, hasta los enunciados que la han llamado la "ciencia por excelencia" y, hoy en día, sus ramas originales ya no corresponden a la realidad antigua: aritmética, música, geometría y astronomía.

[6] *Aristóteles la definió como "ciencia de la cantidad" o como estudio abstracto del aspecto cuantitativo de las cosas materiales que se explican y jusfican. El sistema aristotélico tampoco obedece al presente, aun cuando hace mención de las "cosas materiales", lo que para los fundamentalistas (formalistas), encadena a la matemática abstracta con la realidad concreta. Lo anterior es válido si se trata de formar matemáticos o enseñar matemática, que son dos cosas diferentes, al menos en el método empleado para los propósitos mencionados.

Es claro que la ciencia trata de cantidades (todo aquello que es susceptible de aumento o disminución), estudia un conjunto enmarañado e interrelacionado de conocimientos, a los que se les han ido aumentando otras áreas eminentemente de carácter físico como la mecánica, la óptica, la estática, etc., por lo que se tuvo que utilizar el plural matemáticas para diferenciarlas. Descartes es el que empieza a distinguir entre las matemáticas físicas y la pura o universal. Es en los siglos XVII y XVIII, cuando se comienza a ver la unidad de la ciencia, aun y cuando su definición sigue siendo inconclusa. Desde el punto de vista metodológico, la matemática es una ciencia hipotética-deductiva eminentemente lógica. Para esto, ella utiliza los postulados y los axiomas, que no son arbitrarios, lo que la hace ser la "ciencia de las conclusiones necesarias". B. Russell, en forma humorística, la enunció como "la ciencia en la que no se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es cierto". En el siglo XX, la polémica se incrementó, pero la definición no se dejó alcanzar. Movimientos diversos surgieron tal como los logicistas (que sostienen que el fundamento es la lógica); los intuicionistas, que fundamentan sus argumentos en una intuición original, en la que se percibe la relación con la imaginación, la estética y la arquitectura. Además, está el grupo de los formalistas que la conciben como "un variado y complicado juego de signos y de símbolos, cuyas reglas de estructura y deducción descansan sobre un sistema de axiomas (verdades evidentes), de donde se deducen los teoremas. H. Wexl la definió como "ciencia del infinito".

Si hay problema en definir algo, también lo hay en clasificar sus ramas y vertientes cada vez más apoyadas unas con otras. En todo caso, salva esta situación para los que enseñan a pensar en matemática y que no pretenden reconstruir la lógica matemática. Diferenciar lo que podría ser un nivel de matemática básica y un nivel superior de matemática para profesionales de la materia. Esto simplificaría bastante lo que sería una matemática aplicada y una abstracta; una para la vida y otra para la matemática misma, una para profesionales funcionalmente diferenciados y otra para especialistas en matemática. Un argumento más sobre su vastedad, unidad y, por tanto, necesidad de diferenciarla, es lo que propone Hilbert: "fundamentalmente las consideraciones intuitivas nunca podrán ser eliminadas o evitadas del todo". En la matemática, las escuelas matemáticas del logicismo, el formalismo y el intuicionismo, son, como dijo Einstein, *[7] "una batalla de ranas y ratones entre los matemáticos". En síntesis, parece ser que la matemática es una amalgama de fuerzas intuitivas lógicas, formas simbólicas, razonamientos, tautologías prepositivas o axiomáticas, matematizaciones, inferencias, teoremas válidos, consistencias, completitud, artificios, inconmensurabilidades, sentencias indecidibles, reglas, fórmulas, verdades, integridades, formalismos, demostraciones, paradojas, límites infinitos, hipótesis, realidades objetivas, signos, evidencias, pruebas, intuiciones, imaginaciones, ordenamientos; enunciados sintéticos, empíricos, lógicos; juicios, análisis, etc. Es como el filo de la navaja, entre lo objetivo y lo subobjetivo, lo que antecede y lo que preside, entre la intuición y el entendimiento, entre la abstracción y la realidad, entre la precisión y lo aproximado, entre la estética y la construcción analítica, en todo ello, en unidad y en efervescencia y, por tanto, sólo se puede diferenciar para enseñarla o para desarrollarla: descubrirla o crearla. Hay un aspecto interesante sobre la matemática, y es que utiliza un lenguaje formal para explicar el mundo; por tanto, tiene una gramática, un vocabulario y una precisión en su sintaxis. Este aspecto, como se estudiará más adelante, también es importante porque quizás uno de los problemas que dificultan su aprendizaje es que los símbolos e iconos cambian según la procedencia geográfica de los libros utilizados para su estudio, aun y cuando el razonamiento matemático sea igual para todos los contextos. En todo caso, históricamente la matemática surge para los intercambios de bienes, las construcciones, para contar rebaños, medir tierras e incluso para tratar de explicar el universo, aspectos importantes para los humanos, que significó las divisiones generales matemáticas: cantidad, estructura, espacio y cambio. El concepto de cantidad generó el número, que ha contribuido al desarrollo de todas las ciencias. La estructura que incluye evoluciones sobre propiedades, operaciones, axiomas (teorías), hasta llegar a la estructura de la sintaxis. El aspecto espacial (un poco olvidado debido a la irrupción de la matemática moderna en 1959), los vectores, formas geométricas, etc., que abarcan grandes campos desde los de análisis vectoriales hasta el álgebra lineal y la topología (espacios cercanos y funciones continuas). Por último, el estudio del cambio (relaciones entre cantidades y su tasa de cambio), los procesos de cambio representados por funciones matemáticas, su análisis, la derivada e integral, el análisis complejo, funcional y las probabilidades que son análisis predictivos, así como el análisis numérico utilizado en los cálculos digitales y en la informática.

La matemática ha sufrido tres crisis en su historia, según Atkins, *[8] éstas fueron:

1. El descubrimiento de la inconmensurabilidad. Existencia de los números racionales tales como 1/3 = 0.3333333, que son números infinitos y de los irracionales que no se pueden representar como decimales que se terminan o repiten tal como π =3.141592654
2. La aparición del cálculo en el siglo XVII, cuando surgen los números infinitamente pequeños o que tienden a cero.

3. Las antinomias o mundo de las paradojas o contradicciones irresolubles, que llegan a los límites de la lógica, que son como los límites donde se duda sólo de la duda misma, excepto de la duda misma. De estas crisis se sale con más vigor y más avances en su desarrollo.

Una representación sencilla, simple y gráfica de las ramas de la matemática se presenta a continuación sin establecer ningún orden ni cronología de su nacimiento y evolución. Ver gráfica Nº. 2.

RAMAS DE LA MATEMÁTICA
(Peter Atkin, El dedo de Galileo, 2003)

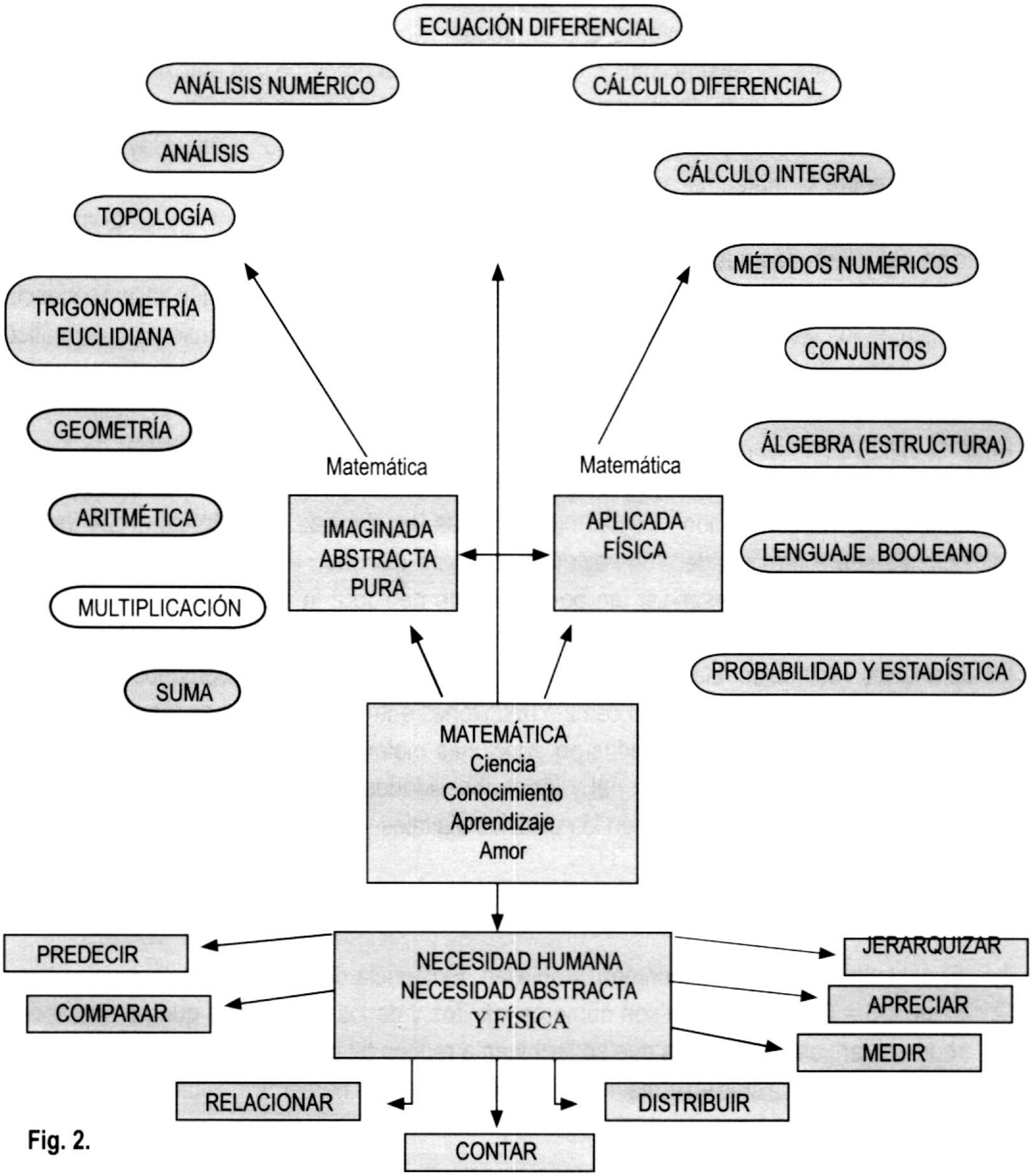


Fig. 2.

En el siguiente cuadro, se ha tratado de percibir algunas diferencias entre la matemática pura y la aplicada.

DIFERENCIAS

MATEMÁTICA PURA	MATEMÁTICA APLICADA
Abstracta	Física
Universal	Pragmática (local, contextual)
Teórica	Instrumental (práctica)
De precisión	De medición (de aproximación)
Para el desarrollo de la ciencia matemática.	Para el desarrollo profesional y laboral.
El conocimiento de la ciencia matemática.	El conocimiento puede determinarse mediante la experimentación física o no (conjeturas).
Relativamente cerrada	Relativamente abierta
Número de operaciones mayores	Números de operaciones menores
Menos error	Más error calculado

Otra división propuesta por Kant más compleja y sintética de la matemática puede ser representada así. Ver figura 3.

DIVISIÓN DE LA MATEMÁTICA DE KANT

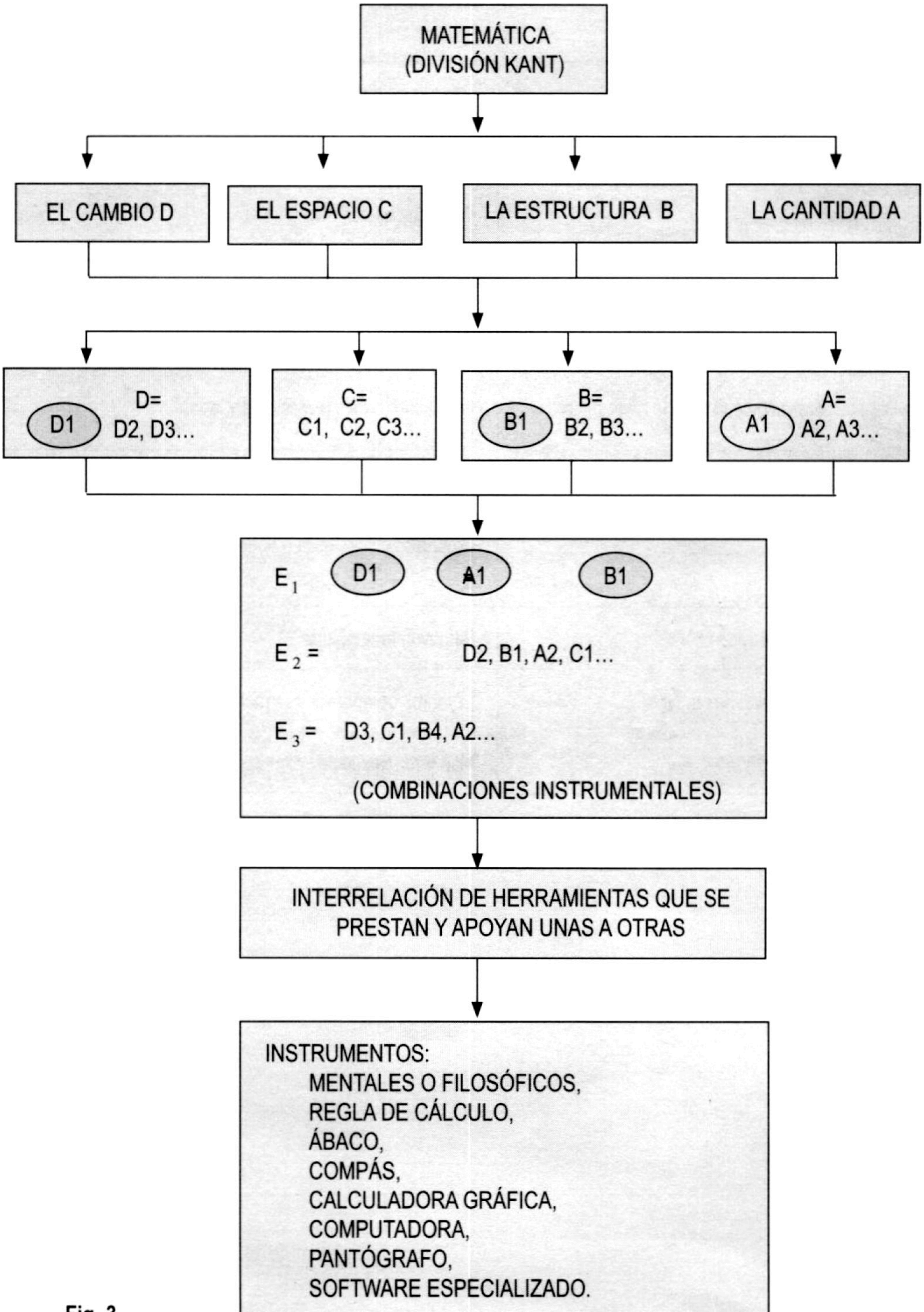


Fig. 3.

Actualmente, debido a la interrelación que se da entre las diversas ramas de la matemática, se ha considerado que todas las categorías o ramas no son más que herramientas interdependientes unas de otras, por lo que se crea así una unidad que hace desaparecer el término matemáticas por matemática (del plural al singular).

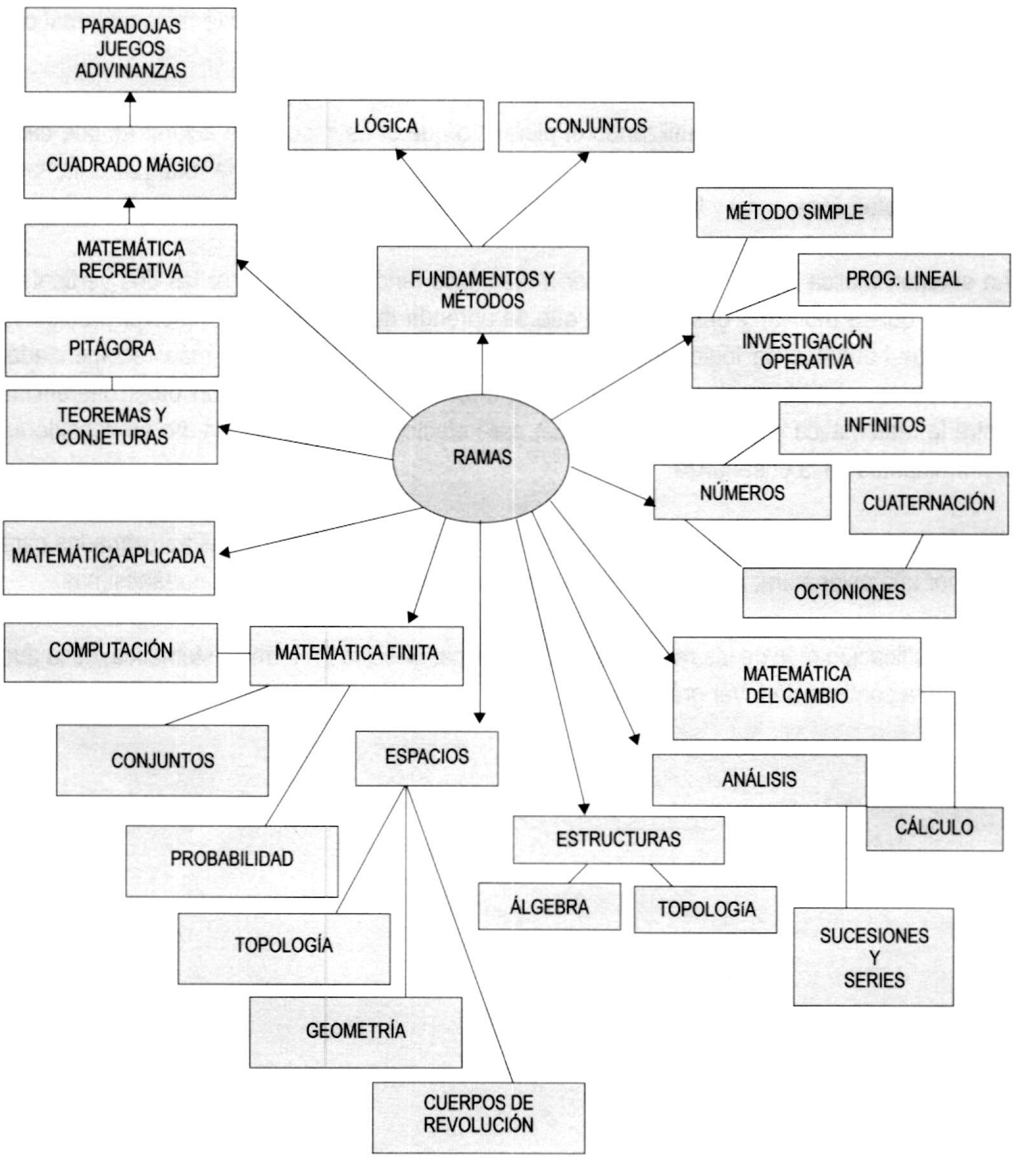
En algunos países, se sigue utilizando el plural. Lo que sí es importante aclarar es que cada rama tiene, en su origen, una vertiente de abstracción (sin relación a la materia, o llamada también matemática pura) y la vertiente aplicada, que sí tiene magnitudes de carácter físico.

Lo anterior implica que si uno quiere ser matemático tendrá que dominar las dos vertientes, y si uno quiere motivar y enseñar para que se aprenda matemática para resolver problemas cotidianos humanos, la lógica indica que será la vertiente aplicada la más recomendada. La precisión, el número de operaciones y el error en las soluciones son otras diferencias entre la matemática pura y la aplicada que, para efectos de simplificación, no se consideran determinantes en la enseñanza.

Así, por ejemplo, las notas en un examen escolar de 6.8 y 7 son soluciones aproximadas para aprobar una asignatura; pero si fueran años luz entre galaxias, sí fueran importantísimas.

Otra clasificación más de las ramas de la matemática, ofrecida en forma sistemática, es la que aparece a continuación. Ver gráfica 4.

CLASIFICACIÓN DE LAS RAMAS DE LA MATEMÁTICA



Diccionario Enciclopédico Gillet. (6)

Fig. 4.

Dentro de la evolución de la matemática, ha habido varios movimientos de avance en su desarrollo. Los más importantes han sido los siguientes:

1. La geometría analítica.
2. El cálculo diferencial e integral.
3. El razonamiento lógicamente riguroso.
4. La axiomática.
5. Las conjeturas intuitivas.
6. Los razonamientos intuitivos.
7. El fundamentalismo abstracto (lógicos y conjuntos), que fue introducido en la educación por los años 50-60.
8. Separación entre la matemática pura y la aplicada.
9. Predominio del carácter axiomático-deductivo.

Este último movimiento es, probablemente, el que ha complicado la enseñanza de la matemática, al confundir el axioma tradicional y el moderno e incluir en los procesos de enseñanza-aprendizaje, la memorización o rutinización en la enseñanza de muchos axiomas, más o menos arbitrarios, abstractos y muchas veces sin sentido. *[9] Blanché (2002) explica que la axiomática se define como un proceso, mediante el cual, todo un sistema puede generar reglas específicas y deducciones lógicas, que parten de ciertas proposiciones básicas, que son los axiomas y los postulados. Se trata de descubrir un modelo para los postulados del sistema axiomático, de modo que cada uno de ellos constituya una afirmación verdadera. La axiomática sufrió una reestructuración al surgir la teoría de conjuntos de contar, lo que dio pie al surgimiento de la axiomática moderna. En la teoría de conjuntos se parte de términos que no se pueden definir, para no caer en un círculo vicioso.*[10]

Esto lleva a que, para el desarrollo de un teoría, no es necesario contar con todas las intuiciones que se tengan de los conceptos primitivos... pero para enseñar matemática sí lo es, como más adelante se planteará. En palabras más claras, se evidencia una distinción entre el desarrollo de la ciencia y la forma o método de enseñar matemática para la sociedad. La pregunta ¿para qué se enseña matemática?, puede ser contestada así: para la misma disciplina o para la vida personal.

La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática* [11]. Lo anterior no necesariamente significa que los conceptos matemáticos deban ser descripciones de una realidad esencial, pero no de una exagerada, falsa o exótica y, sobre todo, inútil para la enseñanza-aprendizaje en el campo laboral. Ver figura N°. 5.

FUERZA MATEMÁTICA

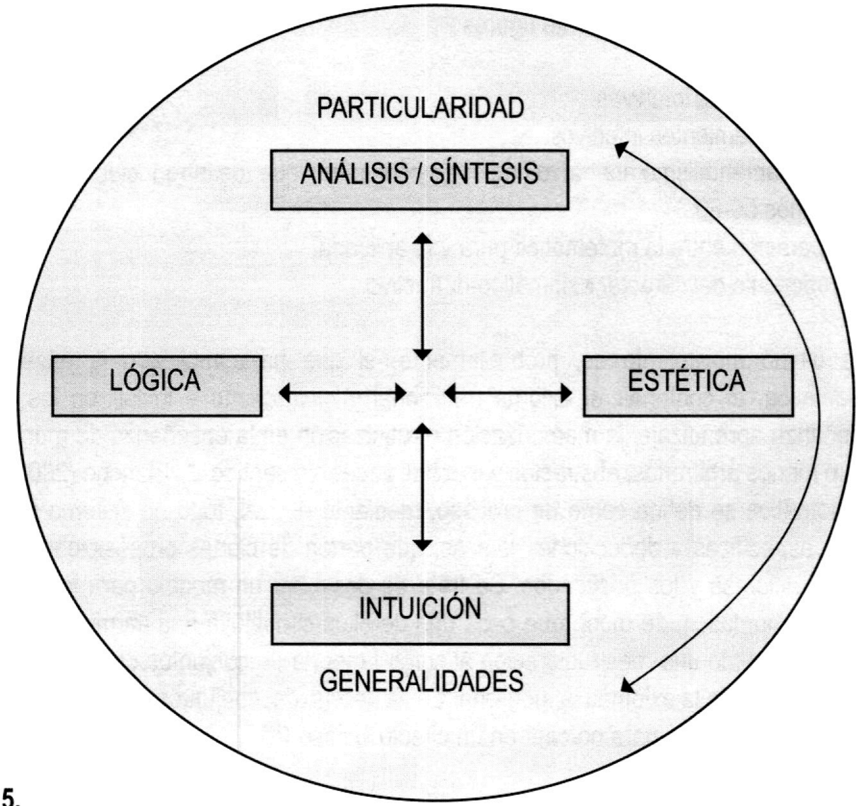


Fig. 5.

Con este choque de fuerzas encontradas queda bastante evidente que la infinitud tiene antecedentes prácticos para el hombre y que sigue siendo útil considerar la matemática como la ciencia que vale la pena aprender, para resolver problemas pensando en su finalidad última: para su misma perfección como ciencia o para la vida laboral. Enseguida se tratará de profundizar los problemas de su enseñanza aprendizaje, las causas y consecuencias de una inapropiada forma de enseñarla y de aprenderla.

III. FRUSTRACIONES Y CONSECUENCIAS DE UN DEFICIENTE PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Estudiantes, profesionales, profesores, entendidos en la materia y otros, manifiestan experiencias y opiniones siguientes:

"Para algunos profesores explicar no es académico, recitar teoremas y demostrar habilidades teoréticas en la pizarra es suficiente y elegante."

"Preguntar y escuchar al más adelantado es la norma, y volte-face es pecado y aberrante. Aprender de memoria el desarrollo de 44 o más identidades trigonométricas es justo y necesario, y sólo así se aprueba el curso, sin saber nada de nada, ni para qué, ni qué, ni porqué, ni dónde, ni cuándo. Lo que importa es seguir incrementando la forma de una matemática que no sirve para pensar y, de paso, que sí llena de miedo y frustración a los estudiantes."

Lo anterior no es una declaración de guerra, probablemente es de alguien traumado por la enseñanza inadecuada de la matemática.

"La matemática me hace sentir idiota."

"Las tablas de multiplicar me aburren."

"El profesor de matemática odia la enseñanza, odia los números y odia pensar. Prefiere usar la memoria y repetir como lora de paseo la cantaleta rutinaria de: uno más uno, dos; uno más dos, tres; uno más tres, cuatro..."

"Sumar o restar letras es algo que no tiene sentido en la vida diaria y aún no he tenido el profesor que me diga el para qué. En todo caso, qué papel tienen entonces los números, si los sustituimos por letras."

"Me pasó varias veces; yo estudiaba tres veces más; yo explicaba a los compañeros; ellos obtenían aprobado y yo aplazaba."

"El colmo fue el profesor que me sugirió tomar pastillas calmantes antes del examen."

"Para algunos profesores enseñar matemática, es demostrar lo que sabe en forma elegante."

"La "mate" no es pan comido, sólo los locos la comprenden. Antes me ayudaba mi papá. Hoy se hace el desentendido."

"Compré un libro carísimo de cálculo, tan mal escrito que no pasé de los límites de la página número tres. Y es que los límites para el cálculo son como la suma para poder multiplicar."

“Siempre creí que la ingeniería se trataba de inventar y resolver problemas humanos, no que le cuadricularan el cerebro con derivadas, antiderivadas y ecuaciones diferenciales. Al final quedamos como octógonos.”

“Todavía ocupo mis manos y dedos para contar, si me los quitaran sería como un auto sin timón.”

“Es difícil entenderla y más difícil debe ser enseñarla. Creo que hay estudiantes frustrados con la “mate” y también profesores equivalentes.”

“Creo que la matemática es difícil porque:

a) No tiene aplicaciones concretas.
b) Son abstractas, son cosas que no existen.
c) Los profesores no tienen didáctica, ni forma, ni modo…ni ganas de cambiar.
d) Son tediosas, aburridas y estériles.
e) Nunca se acaban…
f) Los profesores dejan miles de ejercicios difíciles, y ellos sólo resuelven pocos y los más fáciles.
g) No me significan nada…”

Creo que nadie entiende los conceptos, se memorizan pero no se entienden. Así, por ejemplo, Y=a $^{-x}$, es algo exponencialmente negativo, pero para qué sirve o cómo se explica, nadie lo dice. ¿Será que en la matemática predomina la figura o el icono por sobre el significado?”

“Hubo dos profesores buenos de matemática en mi vida. El profesor De la O y el profesor Nerius. Sus formas de enseñar fueron simples: didáctica, orden y aplicación inmediata. Sin regaños, poses, ni señalamientos inapropiados. Calmos, afables y pragmáticos. Los demás fueron huraños, enojados; dos más, insoportables. Gracias a Dios uno más uno, en el sistema binario es 10. Me salvé por los dos buenos.”

“Me falta inteligencia para entender la matemática”.

“Hay quienes opinan que la matemática que se enseña es la tonta; la profunda y de alcance social no se enseña ni se aprende en las aulas”.

“Encontré a la matemática huyendo de las clases aburridas de geografía e historia. Las tomé por mi cuenta”.

“Creo que no traigo para la “mate”. Algo pasa conmigo que no me entra ni con martillo. El profe es bueno, el problema soy yo.”

Algunos profesores de matemática creen que el problema reside en los estudiantes, su incapacidad para concentrarse, y estudiar, como si sólo esa asignatura existiera, Por otra parte, también tienen traumas ocasionados en primaria, cuando se les precipitaron las situaciones abstractas y se olvidó de que las herramientas son matemáticas para trabajar en la sociedad, no para satisfacer los deseos escolares de carácter puramente académico. La enseñanza de la matemática no es un fin en sí misma. Es un medio, y como tal, debe servir para la vida en sociedad. Hay también otras razones del porqué la enseñanza de la matemática y su aprendizaje se dificultan, y es el hecho de que la solución de problemas es bien estructurada y, por tanto, hay soluciones correctas bien determinadas en la matemática, no así en la vida social. Los estudiantes resuelven los problemas mecánicamente y las soluciones son delegadas al profesor que las valida con sus respuestas predeterminadas: bueno o malo, correcto e incorrecto, cheque o cruz... no hay un nada más; un ¿por qué?, ¿de qué sirvió la respuesta?, ¿Quién dice que son ciertas?: El profesor. ¿Quién espera el veredicto? El estudiante. ¿Quién valida las respuestas?: Nadie. Sobre esto, es común resolver problemas, por ejemplo, de ecuaciones de segundo grado, con dos respuestas que no se comprueba si éstas son válidas o no. Igual sucede con enunciados de problemas, cuyas soluciones no son posibles en el mundo real. Pareciera que en la enseñanza de la matemática existieran procesos inconclusos que contribuyen a hacerla más árida y aburrida. Aparte de todo lo anterior, los profesores no han sido formados correctamente y si lo han sido, se les formó hace ya muchos años, cuando todo era más tranquilo. Hoy tienen que enseñar en un mundo turbulentamente cambiante, en donde la matemática está en todo e invisiblemente presente. La enseñanza-aprendizaje de la matemática es muchas veces como un monólogo permanentemente vacío, aburrido y que tiende desgraciadamente a alejar a los estudiantes, los habitúa a no pensar y a seleccionar carreras profesionales en las cuales la matemática no sea tan necesaria.

Un profesor considera que, en la actualidad, aún se siguen dejando para niveles primarios el análisis y la geometría. El análisis algebraico y la aritmética y sus operaciones racionales e irracionales en educación media, y como un salto abrupto y lleno de misterio y parafernalias teoréticas, el cálculo diferencial e integral. Lo anterior, dicho sea de paso, se enseña sin la debida construcción previa de conocimientos firmes, tales como el precálculo, los procesos de límite y las funciones.* [12]

Si la matemática es construcción, no debería enseñarse sin tener una base sólida. Es preferible una base sólida a un frágil castillo en el aire. Según el* [13] Dr. Claudi Alsina Catalá, uno de los problemas de la relación matemática y la realidad, es las diversas realidades o mitos sobre las realidades que, según él, son muchas veces falseados, no adecuados, inusuales, caducados, exóticos, ocultos, y que simplemente son basura para plantear problemas de matemática a los estudiantes. Y es que, lo que se puede percibir es que en aras de una matemática desafiante, se cae, pedagógicamente hablando, en problemas "jalados del cabello", que alejan en lugar de acercar. Así, cosas absurdas y alejadas de contextos y cotidianidades se utilizan con formalismos perfeccionistas para plantear problemas fuera de lugar, ya sea por sus insólitos datos, por las ridículas incógnitas que se buscan, por aspectos no positivos, no frecuentes, realidades que ya han desaparecido y sin interés para los estudiantes.

La realidad es algo que puede o no ser evidente. La realidad está ahí, no desaparece, se siente, se percibe, es evidente, pero también se esconde, en señales electromagnéticas o de otro tipo. En fin, en la enseñanza de la matemática se deberían utilizar realidades contextualizadas en el entorno cercano de los aprendedores. Por ejemplo, un problema de encontrar la cantidad mínima de agua que se necesita para hacer flotar un portaviones en un dique, puede ser sustituido por encontrar la cantidad de pistas MP3 en un CD de 700 MB, sabiendo que cada pista tiene una comprensión de XKB. En este ejemplo, se nota claramente que el problema se vuelve motivante para el estudiante y que el anterior es utópico e impracticable. Por otra parte, Alsina Catalá sostiene que enseñar matemática requiere afecto, música y materiales apropiados. La matemática, dice que se aprende con la mente, pero debe ser enseñada con el corazón, es decir, con amor, afecto y amigablemente.

Dos problemas más de la enseñanza de la matemática son la tradición y la rutina.*[13] En primaria, por ejemplo, se insiste en leer, escribir, componer y descomponer números cada vez más grandes. La operación prima por sobre el análisis y las relaciones de diversas estructuras numéricas con números. Lo formal es lo primero, lo conceptual secundario. La significación estructural quizás queda fuera o en un tercer lugar. Esto es importante, pues hay evidencia y experiencias exitosas en la enseñanza de la matemática para niños, en las que se parte de percepciones visuales (valores gráficos) que pueden ser la solución en contra de una enseñanza tradicional simplemente simbólica y procesal más que conceptual, intuitiva, lógica y real *[14].

En las escuelas primarias y secundarias hay controles escolares aplicados por los profesores, en los cuales se utilizan los formalismos de las ciencias para aplicar prácticas disciplinarias. Popkewitz (2004)*[15] Sostiene que estos controles son invenciones intelectuales para normalizar y controlar las conductas, relaciones y comunicaciones de los niños. Parece que existe un doble discurso que intenta, por un lado, formar ciudadanos resolvedores de problemas y por otro, se magnifica la majestad de la ciencia y su experticia en un mundo ya definido por formalidad. Lo anterior divide y encarna prácticas de exclusión y división social. Así, los diversos mecanismos de control escolar de carácter académico contribuyen a gobernar la clase. Por otra parte, “conocer” o “saber” matemática es hacer matemática (matematizar), lo que implica que el proceso es diferente entre el descubrir y el proceso de reconstruir la lógica matemática. Esto último enfatiza lo formal, los procedimientos deductivos para justificar lo que ocurre en el producto al final de una pregunta o investigación. Una cosa es el descubrimiento en matemática y otra su reconstrucción lógica. Por otro lado, resolver problemas es descubrir nuevas soluciones, ya no sólo en forma individual como en el pasado, sino en comunidad, comunidad de conocedores que comparten convicciones o conocimientos, y éstos son creados por medio de procesos de discusión y negociación, y cuyos propósitos son ligados de acuerdo a las normas del grupo (Nelson Worfield & Word, 2001). Hacer matemática es una cosa y descubrirla en sus aplicaciones, otra.

En la enseñanza de la matemática, los enseñadores hacemos poco uso de las comprensiones de aprendizaje, metas o competencias que deseamos alcanzar. Por tanto, no sabemos si nuestros estudiantes aprenden o no.

Se confunden objetivos con contenidos y no realizamos un trabajo coherente de planeación del aprendizaje, sino un listado detallado de ejercicios propuestos que tampoco sabemos si se realizan o no. Son contenidos o temas que disparan al universo, pero con muy poca puntería hacia el aprendizaje. Los conceptos matemáticos importantes son tratados sin relacionarlos funcionalmente con la realidad, lo útil y lo concreto, y en forma superficial, es decir, sin el espesor, profundidad y densidad adecuados. Así, por ejemplo, se especifica que un contenido de aprendizaje es "representar gráficamente relaciones matemáticas". Ante esto podemos preguntarnos ¿quién lo hará?, ¿el profesor o el estudiante?, ¿cómo se representará?, ¿se hará con una graficadora, en una cuadrícula?, ¿cuáles relaciones matemáticas?, ¿todas?, ¿geométricas?, ¿trigonométricas? y no especificamos la competencia deseable. Lo que nos lleva irremediablemente a no poder evaluar correctamente el aprendizaje logrado.

*[16] Abarca Abarca, Sadith P. confiesa que, "uno de los problemas en la crisis de la educación: enseñanza-aprendizaje de la matemática es que la mayoría de los profesores en el nivel secundario enseñan la matemática de una forma rutinaria, expositiva y tediosa; no aplican métodos, técnicas y estrategias de aprendizaje y aún continúan usando el modelo tradicionalista, no se preocupan por su capacitación e innovación en sus formas de enseñar, todo lo cual repercute en el aprendizaje de los alumnos los cuales tienen bajo nivel de aprendizaje en matemática".

La UNESCO informa que los estudiantes con bajo nivel de desempeño en la resolución de problemas, tienen serias dificultades en la traducción y expresión matemática de las condiciones propuestas en problemas, dificultad en la aplicación de estrategias de solución y en justificar con argumentos matemáticos válidos las respuestas obtenidas de los problemas planteados. Parece una secuencia viciosa de deficiencias. Ver figura 6.

SECUENCIA DE DEFICIENCIAS

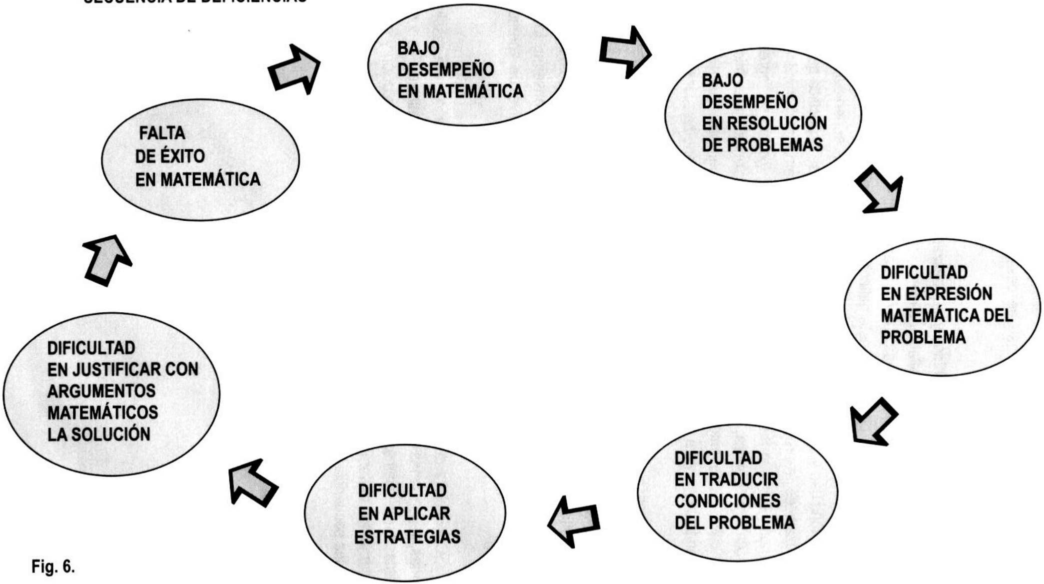


Fig. 6.

Hay todavía más evidencia. García Cruz, Juan A. (2001)*[17] menciona que "los profesores ven su tarea como la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto, por lo que tienden a adoptar un estilo expositivo. Su enseñanza está plagada de definiciones en abstracto y de procedimientos algorítmicos (repeticiones); sólo al final, en contados casos, aparece un problema contextualizado, como aplicación de lo que supuestamente se ha aprendido en clase". Lo anterior provoca en los estudiantes desmotivación: todo está resuelto, sólo hay una solución precisa, no hay aproximaciones, ni respuestas variadas, todo está hecho. El pensamiento es la respuesta correcta que está al final del libro. Enseñar y aprender es sencillo, basta avanzar aceleradamente entre temas y temas, despreocuparse del para qué y optar por la memorización del procedimiento por seguir. Enseñar es fácil. Lo difícil es el aprendizaje; este es otro asunto, que concierne nada más a los estudiantes. Parecería que, siempre, la rutina y la tradición ganan: el "así me enseñaron", el "todo mundo lo hace así", "así se ha hecho siempre", "así soy yo", "soy el más difícil".

Es un hecho comprobado: casi no hay exámenes diagnósticos de entrada en las clases de matemática. Se empieza la clase en donde inicia el programa de estudio, se termina donde dice y en el tiempo que dice el programa, y con los recursos mínimos de apoyo; sin clases agradables, ni juegos, ni historias, ni anécdotas, ni cuentos, ni para qué se estudia cada tema. No hay nivelación previa a nuevos aprendizajes, ni refuerzos, ni consolidación, ni interiorización, ni regresos y casi sin repasos.*[18]

La validación de resultados de las respuestas obtenidas de los problemas es cosa extraña, como si la respuesta fuese acabada e irrefutable.

La didáctica de cualquier asignatura significa, la organización de los procesos de enseñanza (lo que hace el profesor) y aprendizaje relevante para la asignatura (lo que hace el estudiante). Sea la matemática ciencia o arte, sean los problemas sencillos o complejos, un cálculo previo o estrategia didáctica es recomendable para enfrentar en mejor forma el enseñar y aprender matemática. La lucha entre idealistas y prácticos continúa y probablemente continuará, mientras no se defina cuáles son las verdaderas intenciones de lo que se quiere lograr. Las tendencias, enfoques y orientaciones dependerán siempre de los objetivos de formación: ciudadanos profesionales, científicos, líderes, matemáticos, etc.

Mientras el tiempo pasa, la productividad, la eficiencia, lo económico adquieren importancia ante la gran demanda de conocimientos matemáticos, las técnicas que hagan un aprendizaje masivo en un menor tiempo y con calidad, son necesarios para el futuro y de extrema urgencia.

Con toda esta compleja situación sobre lo que está sucediendo con la enseñanza de la "reina de las ciencias", a continuación se presenta un análisis de efectos y sus causas probables, a fin de clarificar y comenzar a entrever soluciones estratégicas, técnicas y recomendaciones para mejorar significativamente su enseñanza. En el diagrama causa-efecto siguiente, se persigue centrar el problema de un proceso de enseñanza-aprendizaje inadecuado y sus consecuencias fatales para estudiantes y para sus profesores (hacia arriba del diagrama), y las múltiples posibles causas del problema para las que podemos posteriormente estimar estrategias para un significativo y revolucionario cambio para mejorar estos dos procesos: enseñar y aprender.

DIAGRAMA DE CAUSA-EFECTO DE UN PROCESO DE E-A INADECUADO

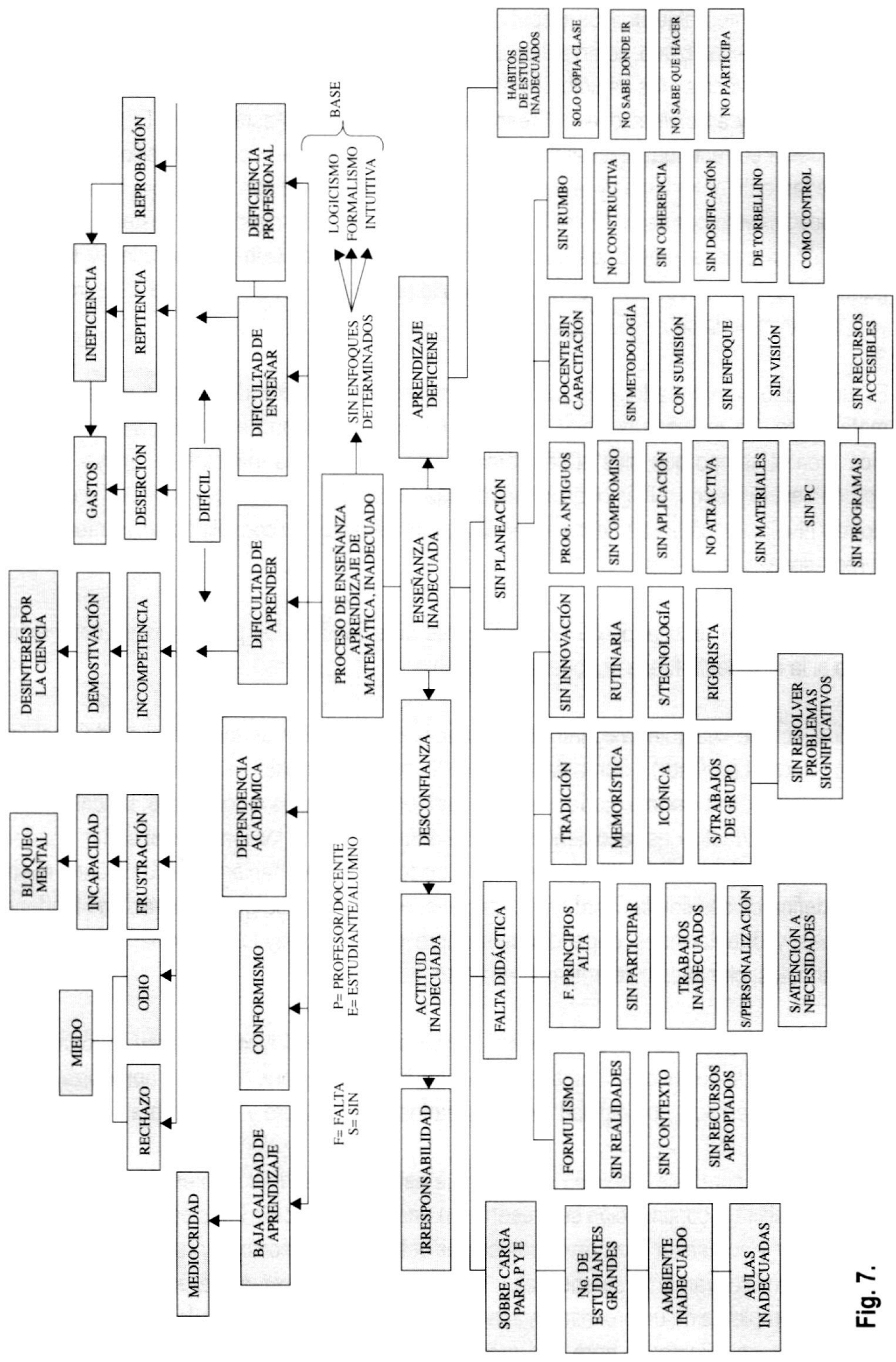


Fig. 7.

IV. HACIA DÓNDE APUNTAR PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden mejorarse sustantivamente evitándose todas esas consecuencias nefastas, que se derivan de la no observancia de los fines, objetivos y competencias que deseamos alcanzar; así como de la no aplicación de los principios didácticos validados a través de la historia educativa y de la no creación de nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje, obtención de recursos reales de aprendizaje, construcción de materiales de bajo costo del entorno, mejores ambientes de laboratorio y, sobre todo, de una enseñanza motivante que abra puertas, que construya pasarelas para que los estudiantes pasen por ellas. La matemática, como cualquier otra ciencia, requiere que se enseñe no sólo con rigor (sin exagerar), sino con la emoción; no con la pregunta capciosa, sino con la insinuación de las múltiples soluciones y validación de respuestas que pueden generarse. Por tanto, para efectos de tener un conjunto de finalidades a las que apuntar, los siguientes propósitos pueden ser objetivos desafiantes por lograr:

1. La calidad del aprendizaje de la matemática debe ser mejorada mediante un perfeccionamiento de la enseñanza en todo nivel del sistema educativo.
2. La superación en la enseñanza de la matemática debe lograrse con un cambio de actitud hacia las competencias por lograr en el estudiante, la finalidad de la formación, el compromiso docente, con el proceso propiamente dicho y la presencia de la realidad contextualizada, en la que se apliquen las diversas prácticas de aprendizaje significativas para el estudiante.
3. La matemática debe humanizarse, sirviendo para resolver problemas cotidianos de la sociedad, tanto los problemas bien estructurados como los cuasi-estructurados, mediante la adquisición de un pensamiento lógico.

La matemática debe enseñarse con amor y afecto para cambiar las actitudes del estudiante. La matemática debe democratizarse, debe relativizarse según se trate de la matemática de precisión, donde "la suma de las partes es igual al todo" o, por otro lado, la matemática de aproximación donde "dos paredes opuestas levantadas a plomo no son paralelas", o matemática no precisa, en donde lo absoluto y lo general son relativos a lo que se trate. La matemática es elaboración humana, es un producto cultural que debe ser para todos, que debe disfrutarse, construirse, aplicarse y difundirse entre todos o la mayoría de los seres humanos; éstos tienen el derecho de explicarla, dominarla, hacerla suya y utilizarla para su trabajo cotidiano. Los prejuicios y temores académicos deben minimizarse, utilizando otras formas de enseñarla, otras formas de aprenderla, otras formas de apoyarla, otras formas de presentarla, a manera de hacerla atractiva constructiva y desafiante.

[11]*Courant (1941) publicó el libro ¿Qué es la matemática? en el que expone conceptos y métodos fundamentales de la matemática. En la reseña del mismo aparecida en la revista Suma Nº. 29, (1998) cuyo autor es Julio Sancho, dice lo siguiente: "En el prólogo a la primera edición, Courant se lamenta de que la matemática estuviese perdiendo su lugar dentro de la formación

de las personas cultas. La causa aún continúa siendo actual, parte de la responsabilidad recae en la enseñanza de la matemática, que ha degenerado hacia el adiestramiento en técnicas de cálculo (Que hoy lo hacen las máquinas), que no conducen a la comprensión de los conceptos, ni ayudan a una mayor independencia, así como a una investigación muy especializada, abstracta y carente de conexiones con otros campos del saber y con las aplicaciones. El texto planteado por el autor, considera la matemática como un todo orgánico, reúne pensamientos y acción y enfrenta el contenido real de la matemática, apuntando a metas, motivos de desarrollo, vislumbrando logros y métodos de la matemática y lo hacen sin caer en los excesos que un mal entendido rigor impone a textos similares.

El proceso de enseñanza se mejorará volviéndolo junto con el aprendizaje atractivo. Esto es, "con fuerza para atraer". Con la palabra, con acciones, los profesores debemos ganarnos la voluntad de aprender de los estudiantes. Esto evidentemente se facilita si buscamos qué les interesa a los estudiantes. Si lo que enseñamos es útil, práctico, tiene laboratorio y está dentro del desarrollo del estudiante (zona del próximo desarrollo), lo atractivo, lo lúdico, no es como algunos extremistas creen, que es la chanza (fiesta, burla graciosa); el perder el tiempo con juegos sin propósito o sentido. Por el contrario, una enseñanza que atrae a los estudiantes debe partir de sus intereses y capacidades, necesidades y de un diseño instruccional adecuado. El juego tiene reglas. Por tanto, la solución al inadecuado proceso de enseñanza-aprendizaje pasa también por contar con programas de enseñanza adecuados, basados en un compromiso para lograr competencias matemáticas y no por dominar solamente procedimientos repetitivos de cálculos matemáticos. El enfoque y la visión de la enseñanza deben clarificarse antes de emprender la tarea de una enseñanza que sea efectiva, afectiva y relevante o significativa para el proceso en referencia. Por otra parte, deben abandonarse la rutina, el formalismo exagerado, dependiendo esto de si la visión y misión es formar matemáticos o formar profesionales competentes, con habilidades matemáticas entre otras competencias profesionales. Así, el buen diseño de instrucción debe dejar de lado el torbellino de avanzar de un contenido a otro para cubrir el programa, en forma atropellada y por exigencia simplemente académico-administrativa. Debe abandonar el atropellamiento y dirigir la atención a la dosificación, al avance con resultados, al dominio de gradas constructivas de aprendizaje, a una coherencia conceptual con propósitos operativos y a uno o varios rumbos (secuencias o caminos de aprendizaje) de destino, con tareas variadas y diversificadas. El enfoque de la enseñanza debe ser innovador en el sentido de buscar problemas y temas por resolver, y no lo que siempre se ha estado tratando de realizar sin éxito, que es el partir del tema hacia el problema que nunca llega. Este nuevo intento, si bien no es fácil y requiere más tiempo, bien vale la pena probarlo. La didáctica general y sus principios son aplicables, así que conviene pasar de lo convencional hacia la construcción de una dinámica participativa, de trabajos en grupo, de atención a la diversidad de saberes, a la atención de particularidades y realidades individuales y contextualizadas, además de un ambiente pedagógico adecuado, una organización óptima según el tamaño de los grupos de clase y una equilibrada y responsable carga de trabajo. El sistema "talla única", que obliga a todos a aprender lo mismo y al mismo tiempo, independientemente de las necesidades individuales, es decepcionante.*[19] El enfoque de una nueva enseñanza requiere diversificar las acciones en el aula, lo que muchos profesores exitosos en primaria llaman el "aula diversificada." Ésta consiste en darle a cada quien, tareas de aprendizaje según sus necesidades y problemas. [20]*El aula diversificada nació hace mucho tiempo, cuando un profesor "unidocente" tenía que atender a niños de varias edades y niveles de conocimientos, y para lograrlo, el profesor dividía el tiempo, los recursos y sus actividades, tratando de darle a cada quien según sus necesidades.

El aula diversificada es un aula diferenciada, en donde las estrategias van desde identificar las inteligencias de los alumnos, la utilización de enigmas (preguntas retadoras para trabajo en grupo), materiales grabados de audio, video, CD, etc. Diversidad de esquemas, diversidad de textos, círculos de estudio, lecciones de progreso gradual, centros de progreso, contratos de aprendizaje, instrucción a grupos pequeños, estudio personal, centro de interés, grupos de interés, deberes variados, instrucciones complejas, epígrafes, etc.

El enfoque es claro, el programa se hace en base a las diferencias entre los estudiantes. La evaluación es continua y sirve de diagnóstico. Se reconocen las múltiples inteligencias de los alumnos. El éxito es crecimiento personal desde un punto de partida; hay libertad de escoger tareas en función de intereses de los alumnos; hay muchas opciones de actividades de aprendizaje. Las técnicas de enseñanza son múltiples, se da sentido a las habilidades previas, el tiempo es flexible y según las necesidades de los estudiantes; hay materiales preparados, hay sistematicidad en los sucesos e ideas diarias. Los problemas se resuelven con la participación, los alumnos y el profesor establecen objetivos individuales de toda clase y la evaluación es de muchas maneras. Es definitiva, un replantearse como dar la clase para un mejor aprendizaje de los estudiantes, que tienen diversidad de niveles y ritmos de aprendizaje así como diferentes aptitudes. Los estudiantes, al parecer, serán más heterogéneos en el futuro, y la homogeneización es un desperdicio de eficacia, tiempo y talento. Cada estudiante merece atención para progresar y, si esa atención es de calidad, mejor será la equidad. Así que el enfoque de largo plazo sobre la mejora de la enseñanza de la matemática debe pasar por la pregunta: ¿para qué? ¿para dominar una disciplina o para utilizarla en la vida? No sólo es importante el cómo enseñar, sino también el qué enseñar y cómo utilizar las calculadoras y dejar sin razón de prohibirlas en clase. No debemos olvidar que el proceso de transición de un didáctica tradicional o convencional por otra más dinámica y constructiva, requiere que todos los actores del desarrollo educativo nos sometamos a un proceso de desacondicionamiento de paradigmas absolutos que nos permita llegar a ser más libres, más responsables y más respetuosos, tanto en nuestra enseñanza como en el aprender.

Todo lo anteriormente planteado tiene su base en las teorías contemporáneas del aprendizaje, que aportan a la mejora del mismo. Teorías del aprendizaje hay muchas dentro de las cuales se tienen: el asociacionismo, el conexionismo, la teoría del comportamiento, del procesamiento de la información, el aprendizaje significativo, la asimilación, cognoscitivismo, conductismo, de la instrucción, aprendizaje por descubrimiento(realismo), constructivismo, la mediación entre otras teorías... Si se aceptan avances en cada una de las teorías y dejamos a un lado rivalidades entre escuelas, que no conducen a nada, para la mejora del aprendizaje se pueden sintetizar algunos de sus aspectos de, al menos, cuatro enfoques importantes y sus avances.

1. **Enfoque conductista.** El conocimiento y la habilidad así como la actitud (competencia), se demuestran (se ven) o se perciben a través de la conducta, es decir, se manifiestan en forma externa a los procesos internos que son desconocidos. La efectividad de un acto educativo se mide en términos de resultados (comportamiento final). El estímulo adquiere importancia, así como la respuesta, y no tanto los procesos mentales internos. Parece ser que este enfoque tiene mucha aplicabilidad para la educación tecnológica y la formación profesional.

2. **Enfoque cognitivo.** Basado en el constructivismo, que abarca un amplio espectro de teorías cerca de la cognición y en el que el conocimiento existe en la mente como representación interna de una realidad externa. El aprendizaje es individual, es una construcción interna. Es importante en este enfoque la autorregulación, la diferenciación e integración de los conocimientos.

3. **Enfoque del constructivismo social.** El aprendizaje se concibe integrado a una comunidad en la que se practica. Se trata de enlazar las actividades del aula y las acciones sociales de los alumnos, así como las formas simbólicas de los contenidos del aprendizaje. El conocimiento depende de las experiencias previas de los aprendices, y se avanza hacia zonas de desarrollo próximo. En este enfoque el proceso no tiene fin.*[21]

   La didáctica basada en estrategias constructivas tiene muchas ramas. Vamos a circunscribirnos a las siguientes ideas:

   a. Los conceptos aprendidos por el estudiante deben vincular relaciones, que le permitan formar su propia estructura cognitiva en forma de red.

   b. Los contenidos por aprender deben ser significativos para el aprendiz, de acuerdo a su propia estructura cognitiva, en forma de red.

   c. Los nuevos conceptos serán significativos, entendibles y aprendidos por los alumnos, si pueden vincular la nueva información a alguna rama de su red de manera práctica y útil.

4. **Movimiento realista.** Hans Freudenthal*[22] sostiene un movimiento basado en que "la matemática es una actividad humana" que contradice las "reformas educativas", la nueva matemática, las formas rígidas de evaluación e incluso los objetivos operacionales. Parte de una educación realista y no de una transmisión de matemática como un sistema preformado. Busca la reinvención y critica la enseñanza tradicional deductiva. Se refiere a la corriente conductiva como encajonada y forzada de arriba hacia abajo. Reconoce la matemática moderna como lejana por ser abstracta y sin embargo, por la misma flexible. Concluye que la matemática debe ser útil. Si se intenta enseñar matemática pura y después mostrar cómo se aplica considera que es

el orden equivocado; las cosas están al revés si se parte de enseñar, el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma. El énfasis no sólo puede ser del resultado sino del proceso. El modelo de Freudenthal parte de matematizar cuestiones de la realidad; el foco no está en la forma de la actividad sino intrínsecamente en la actividad misma.

Por ejemplo, Corberán, R. (1996)*[23] que sigue esta corriente, propone el esquema abreviado siguiente, para mejorar significativamente la comprensión del concepto (muy dificultoso de enseñar por cierto) de superficie área y perímetro desde, primaria a la universidad.

Fenómeno	Organiza mediante	A su vez se organizan	Resultados	Naturaleza de resultado
Reparto justo	Comparación Directa o indirecta	Inclusión Deshacer y recompensar afinidades.	Área como porción de plano	Geometría
	Medida	Agotamiento de una unidad.	Área como recubrimiento de espacio	Objeto Mental Área
	Estimación	Aproximación (Exhaución).		
	Aprovechamiento de regularidad	Uso de fórmulas Generales. Relaciones geométricas.	Área como algoritmo de cálculo	Numérica

Esta corriente de educación matemática realista fundada por Freudenthal, nace como reacción a la matemática moderna, al mecanicismo, a la enseñanza tradicional e incluso a las teorías del estructuralismo, constructivismo, investigación estandarizada, etc. Sus principios fundamentales son de: la actividad, la realidad, los niveles, la reinvención guiada, la interacción y la interconexión. Sus ideas centrales incluyen: Existencia de una matemática para todos; la comprensión matemática tiene niveles en donde los contextos y los modelos son relevantes; es necesaria la investigación de contextos y situaciones, buscar en la historia de la matemática y en las invenciones y producciones espontáneas de los estudiantes.

A partir de estas bases teóricas, propuestas por diversos autores, la nueva didáctica de la matemática debe de orientarse por las siguientes características:

1. La enseñanza centrada en el estudiante. En actividad de él mismo, en la participación grupal y en la personalización, de tal manera que se minimice la frontalidad docente y se cambie a una lateralidad de apoyo, orientadora, motivadora, creativa y realista.

2. La actividad del estudiante, dentro y fuera el aula, conlleva un sentido pedagógico más que un sentido mecánico. La excesiva memorización, trascripción mecánica, la toma de apuntes y recompensas sin propósitos definidos o desvinculados del objetivo de aprendizaje deben de omitirse; en su lugar, deben abrirse los espacios educativos para la realización de proyectos de aulas y nuevos ambientes didácticos.

3. Utilización de medios didácticos en forma no tradicional. Los medios didácticos deben constituirse con el pretexto de acercar al estudiante al contexto social de la realidad nacional y mundial; deben estar dispuestos para fortalecer la capacidad para crear, innovar, adaptar, rediseñar, adecuar, etc. Por ejemplo, el texto debe ser el prototipo para la creación individual y colectiva. Esto implica el abandono del texto como medio de repetición o bien como la panacea de la asignatura. En su lugar, se debe de recurrir a la diversidad de fuentes enriquecedoras.

4. La práctica evolutiva de los aprendizajes es coherente con los principios que rigen los procesos de evaluación. Es decir, que está orientada hacia la mejora del aprendizaje, mediante la atención oportuna de aquellos procesos cognitivos vinculados con la capacidad de análisis, síntesis y aplicación. Por tanto, la usanza del proceso evaluativo como un medio para comparar o separar estudiantes, excluirlos o apartarlos del camino, hacer que abandonen el aula en forma prematura sin salida ni acciones remediales, no se encuentra contemplado en un constructivismo humano. En suma, la evaluación del aprendizaje debe servir para guiar y asesorar más a los estudiantes y mucho menos para compararlos unos con otros, clasificarlos en buenos y malos o excluirlos de la educación.

5. Cada profesor en su aula fomenta la disciplina de capacitación y de aprendizaje, más que una disciplina de castigo. Esto significa que el control deberá ser ejercido bajo un criterio de mejora permanente hacia la excelencia. También significa abandonar posturas rígidas y convencionales. Además, debe entenderse que tanto la disciplina como el control, no son sinónimos de falta de respeto a la dignidad del estudiante. El concepto de ética debe prevalecer. Recordemos que muchas veces el tedio de una clase propicia la pérdida de atención y, por ende, de concentración y motivación. Por ello, es importante incluir el aspecto lúdico para el aprendizaje.

6. Y, por supuesto, este proceso de transición (de un modelo por otro) requiere **la disponibilidad de ir tras la búsqueda continua del mejor método** o secuencia didáctica para lograr el dominio de conceptos, actitudes, habilidades y transferencias de aprendizaje, aplicando diversidad de formas y técnicas de enseñanza y de evaluación.

El escenario del siglo XXI, nos presenta una nueva faceta de cómo aprende nuestra juventud. No se puede disimular o pretender obviar la fuerza con que empujan los diferentes medios tecnológicos de información y comunicación. Ya sea que nos gusten o no, son los que acompañan a nuestros estudiantes. De ahí que es importante recordar que nuestros aprendedores pueden no ser muy “sabedores” de nuestra especialidad, pero sí son capaces de valorar y emitir juicios sobre la calidad de nuestra enseñanza. Entonces, se vuelve necesario reconsiderar y evaluar la forma de cómo se está conduciendo el proceso de interacción educativa en cada ciclo, puesto que el logro de los objetivos de aprendizaje propuestos está estrechamente vinculado con la manera de cómo nos relacionamos con los estudiantes y cómo orientamos el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por eso, es fundamental que el docente tenga presente al momento de efectuar el acto educativo:

1. La precisión de las competencias que quiere lograr en los estudiantes (u objetivos de aprendizaje).

2. Que debe partir con y por el respeto del estudiante, aceptar su grado de desarrollo, sus conocimientos, sus habilidades, sus valores y valerse de ellos para instruirlo.

3. Que debe aceptar que hay conocimientos que son difíciles y a veces casi imposibles, que el estudiante pueda adquirir, dadas sus limitaciones, sus antecedentes y su contexto.

4. Considerar que el deseo de aprender del estudiante no puede ser detenido o ridiculizado por una acción académica, que intenta algo imposible en forma prematura, represiva y sin objeto.

Ante estas recomendaciones, es relevante reflexionar con respecto a la forma de cómo facilitar el aprender de los estudiantes:

a. ¿Cómo aprenden los estudiantes? Siguiendo un proceso didáctico que le permita percibir el "todo" de la asignatura que analice y sintetice sus partes, que consolide sus conocimientos con ejercicios realísticos y, sobre todo, que tenga la oportunidad de practicarlo socialmente, verificando resultados.

b. ¿Cómo adecuar el contenido de conceptos, procesos, actitudes y habilidades del programa a las necesidades, problemas, intereses de los estudiantes y de la sociedad? Explorando las ideas de los estudiantes, preguntando sus aspiraciones, expectativas, necesidades de tiempo, conformación de equipo, horarios, etc. Es recomendable hacer un examen de entrada (diagnóstico) antes de comenzar una asignatura o un tema nuevo, con el objeto de saber desde dónde se comienza y hasta dónde se puede llegar.

c. ¿Cómo despertar su necesidad por aprender? Motivándolo mediante conocimientos aplicables, procesos reales, proyectos creativos. Así como también contribuyen los consejos, la realización de proyectos o trabajos en equipo.

d. ¿Cómo organizar al grupo de estudiantes de tal manera que todos participen? Asignando para la evaluación un porcentaje del valor a las participaciones y mediante técnicas de grupos pequeños, medianos y grandes.

e. ¿Cómo lograr que los estudiantes se comprometan en el logro de su aprendizaje? Mediante la participación, decidiendo en conjunto con el profesor las actividades de aprendizaje por efectuar.

f. ¿Con qué se realiza la evaluación? Mediante diversos instrumentos (listas de cotejo de verificación, proyectos, tareas, etc.) y tipos ya establecidos. (Evaluación diagnóstica, formativa y sumativa). Es básico que los criterios por evaluar sean claros y objetivos, y que los conozcan los estudiantes. Las pruebas de aprovechamiento deben responder a objetivos preestablecidos y criterios de evaluación. Sin embargo, existen aspectos importantes de evaluar que no mucho se consideran, tales como la creatividad, la originalidad, la solución diferente, la participación, la cooperación, el liderazgo, la colaboración, el entusiasmo, el respeto, la comunicación y el esfuerzo, la persistencia, etc. los cuales deben ser objetivos permanentes para todo el proceso de formación.

El "ser de la enseñanza" debe sujetarse a la capacidad que tiene el docente para estar dispuesto a la apertura y flexibilidad ante la diversidad de opiniones, la disponibilidad para descubrir nuevas alternativas, que faciliten el desarrollo personal del estudiante y su compromiso con la realidad y con la sociedad.

Reconozcamos, de una vez por todas, que el estudiante es un ser biológico, psicológico, social y cultural y con una historia determinada. Es un ser en proceso de crecimiento, con poder para crear, decidir, enfrentar sus limitaciones y con capacidad de establecer relaciones francas y solidarias y con mucha capacidad para asumir los compromisos asignados. Por ello, también es capaz de trascender, al igual como aconteció con nosotros cuando nos correspondió desempeñar el rol de estudiantes.

Se tiene que subrayar que a nuestros estudiantes, les ha tocado desarrollarse al interior de una sociedad compleja e incierta, que vertiginosamente está en constante cambio y se construye en un proceso dialéctico y participativo. Además, se tiene que tomar en cuenta que el entorno sociopolítico y económico demanda de manera imprescindible, que sus conocimientos teóricos estén integrados con la práctica social. Esto requiere que los docentes estén dispuestos a abrir los espacios de reflexión sobre cómo todo conocimiento puede actuar en la realidad social y viceversa. A manera de ejemplo, algunos problemas muy comunes que hemos detectado en nuestros estudiantes, y que los manifiestan para pedir ayuda y comprensión, son la situación laboral en que se encuentran tanto ellos como su familia, los cambios de horario a los que se ven expuestos, el tipo de trabajo que deben realizar, los cambios de turno, la peligrosidad de los sectores donde viven y/o que deben transitar, etc. El docente debe estar alerta ante estos problemas y visualizar qué soluciones proponer. Y es que, realmente, toda dificultad tiene solución si existe voluntad para colaborar. Hay muchas alternativas de solución tales como: Cambios de sección, tutorías, clases de fin de semana, clases semipresenciales, aulas virtuales, exámenes remediales, refuerzos, clases de recuperación, etc., etc.

En fin, la realidad de nuestros estudiantes puede ser influida por nuestra enseñanza. Si se les ofrece a los estudiantes alternativas viables, que les permitan continuar con su aprendizaje y superación, veremos en un corto tiempo una legión de jóvenes dispuestos a aprender matemática, aun en contra de los problemas de la realidad circundante.

La disposición solidaria de los educadores debe quedar demostrada, al aportar la base pedagógica necesaria para hacer realidad la consolidación del aprendizaje, sustentado en un cuerpo teórico-práctico coherente, que sirva de apoyo a la calidad de los futuros profesionales.

Veamos qué acciones podemos realizar para ser profesores socialmente comprometidos con nuestras actuales generaciones:

1. Desarrollemos actividades de aprendizaje, que fortalezcan y preparen al estudiante para saber hacer, aprender a convivir, tener, ser y estar.

2. Propiciemos los espacios para que el estudiante aprenda a explorar y descubrir por su propia responsabilidad, pero brindándoles nuestra experiencia y el apoyo necesario.

3. Ofrezcamos aprendizajes relevantes y significativos partiendo de los conocimientos previos que poseen y de sus intereses.

4. Compartamos conocimientos y procesos educacionales, que les preparen para alcanzar una mejor calidad de vida asociada a la satisfacción de las necesidades afectivas.

5. Establezcamos situaciones que favorezcan la confrontación de preconceptos (nada es fijo).El cambio cambia y de manera acelerada. La ciencia y la tecnología avanzan exponencialmente.

6. Construyamos conocimientos útiles de manera individual y colectiva.

Los productos del aprendizaje no son simplemente conocimiento o saberes. Los productos son:[*24]

a) Conocimientos de los contenidos del aprendizaje.
b) Conocimientos de los procesos de aprendizaje.
c) Actitudes hacia los contenidos del aprendizaje.
d) Actitudes hacia los procesos del aprendizaje.
e) Habilidades de aprendizaje cognitivo.
f) Habilidades afectivas de aprendizaje.
g) Habilidades sociales de aprendizaje y habilidades de transferencias de todos los aprendizajes logrados hacia otras personas o la comunidad.

Los conocimientos, por tanto, deben estar fundamentados por algunas de las siguientes premisas:

1. La ciencia es conocimiento abierto. Nada es cerrado, todo se puede reabrir a una nueva discusión.

2. La ciencia trata de explicar la realidad por sucesiones aproximadas.

3. El método de la observación e inducción y las aplicaciones prácticas son efectivas para aprender.

4. El medio ambiente es fundamental en todo conocimiento que se aprende.

5. El procedimiento es importante pero debe fundamentarse con el para qué se aprende.

6. El método científico no es universal. Todo puede ser criticable.

7. El concepto se puede proporcionar mediante nuevas situaciones en medio y contextos determinados.

La enseñanza es la función primera del docente: "lo que hace, sus actividades". Por otra parte, el aprendizaje "es lo que hace el estudiante".

Por tanto, la didáctica en sus dos preguntas básicas: ¿Para qué? y el ¿qué?, encierran el secreto milagroso de una educación más responsablemente con la demanda mundial de calidad.

La didáctica es para la enseñanza parte de un plan de clases que encierra el ¿para qué? y el ¿qué? Este plan, al ponerlo en ejecución con métodos activos y actividades metodológicamente bien definidas, debe evaluarse para mejorarlo mediante criterios.

La didáctica es una herramienta, es la técnica de la enseñanza, es conducir a los estudiantes en el aprendizaje, es la cristalización general de la enseñanza; es ciencia y práctica que se preocupa de los principios, las normas, los procedimientos, los recursos y las técnicas más adecuadas para conducir a los estudiantes en su aprendizaje hacia los objetivos predeterminados. La enseñanza es la función primera del docente: "lo que hace, sus actividades". El aprendizaje, por otra parte, "es lo que hace el estudiante"; es un cambio de capacidades más o menos permanente en el estudiante, aprender es vivir intensamente una experiencia.

La didáctica en función del aprendizaje considera que para formular un plan sencillo de clase, basta con responder cada una de los siguientes interrogantes: ¿cómo? ¿para qué? ¿qué? ¿con qué? Siguiendo la línea de este enfoque se considera que el plan de clase es primordial para que el docente tenga presentes algunos principios didácticos en los que, sin duda alguna, su aplicación generará cambios fundamentales en el desarrollo de los dominios de los alumnos. Entre los principios más destacados, encontramos una vez más:

1. Partir de lo conocido para llegar a lo desconocido.
2. De lo fácil a lo difícil.
3. De lo concreto a lo abstracto.
4. De lo simple a lo complejo.
5. De lo real a lo ideal.
6. De lo insatisfactorio a la utopía concreta.
7. Actividad del estudiante con propósito.
8. Examen de entrada y pronóstico de aprendizaje.
9. Construcción de la operación mediante la investigación.
10. El problema como proyecto cooperativo.
11. La colaboración entre estudiantes.
12. La experimentación.
13. Exámenes formativos.
14. Diseño de actividades de autoaprendizaje.
15. La reconstrucción y la creación de conceptos.
16. Adaptar la enseñanza al nivel del estudiante y de ahí empezar a construir el aprendizaje.
17. Interdisciplinariedad (docentes de otras disciplinas invitados).
18. Socialización (trabajo en grupo).
19. De lo cercano a lo lejano, de mi interés a nuestro interés, del todo a las partes, de la realidad a la visión, del problema a la solución, de la solución a la acción, etc.
20. El proceso didáctico: planeamiento, presentación, orientación, dirección de actividades, control y disciplina, evaluación sumativa y consolidación del aprendizaje.
21. Utilización de diversas técnicas didácticas. (Técnicas para cuando se divide el grupo en pequeños grupos, técnicas de pequeños grupos dirigiéndose al grupo total y técnicas para el grupo total).

Las actividades de aprendizaje eficaces se caracterizan porque se planifican atendiendo y siendo congruentes con los contenidos, el enfoque, la ubicación, el modo de operación, etc. Cuando el profesor organiza su plan de actividades académicas, evita la excesiva improvisación, la rutina y la subjetividad. Los estudiantes pueden beneficiarse de aquellas actividades, que están planificadas con un propósito determinado, ya que se convierten en el complemento de la clase y les permite alcanzar sus metas educativas.

Las actividades que propone el profesor deben permitir:

1. Explorar conocimientos previos para asegurar la acción.
2. Confrontar, reestructurar y crear nuevos conceptos.
3. Aplicar el conocimiento en operaciones de proyecto.

4. Asimilar el cambio conceptual e internalizarlo.
5. Trabajar en grupo cooperativo.
6. Definir nuevos problemas y contextos.
7. Aprender a seguir instrucciones (sincretismo, análisis y acción).
8. La interactividad constante (comunicación).
9. Trabajar individualmente, colaborativamente y, si es necesario, competitivamente.

El profesor de hoy y del futuro deberá ceder su protagonismo de actor principal en la clase; en su lugar, cederá la escena protagónica a los que acompaña en el proceso de "aprender-aprender". Esta "desaparición" de manera sutil no significa abandono o dejar al libre albedrío la clase; por el contrario, deberá asumir el compromiso consciente de diseñar una planificación participativa realista y útil, donde quede evidencia de los nuevos criterios pedagógicos que guiarán el proceso de "aprender-hacer-aprender" y, a su vez, deberá asumir el compromiso de hacerlo del conocimiento de toda la clase, para aprender a convivir y colaborar.

Este referente pedagógico constituye la esencia educativa que debemos practicar en el aula. Es el sistema de relaciones e interpretaciones que se construyen, cuando profesores y estudiantes se enfrenten al acto creativo de aprender y enseñar.

Por tanto, todos lo actores que decidimos —por voluntad propia— laborar en el área educativa, debemos aunar esfuerzos para lograr que:

- El proceso de "aprender-enseñar" se vuelva, tanto para el estudiante como para el profesor, una actividad significativa, útil, participativa, productiva y realista.

- Las relaciones pedagógicas se convierten, realmente, en procesos democráticos de diálogo.

- La clase sea, realmente, el medio para estimular la imaginación creadora del potencial humano que está en proceso de desarrollo.

Sin duda, las mejores estrategias educativas para alcanzar todo esto son: el método reflexivo y método de las aplicaciones prácticas. Pero también es importante considerar aquellos "aspectos especiales" que acompañan el éxito de este proceso, posiblemente sin orden de prioridad, pero que deben estar presentes. Menciono algunas:

1. Asegurarse de que el estudiante cuente con el tiempo y el espacio para el trabajo autónomo o independiente.
2. Considerarse acciones y actitudes motivadoras que promuevan la diversidad e intensidad de participaciones en clase.

3. Orientar la enseñanza y el aprendizaje hacia actividades y acciones, que permitan la construcción de conocimientos más que su repetición automática.

4. Incorporar al programa actividades que den paso a la recuperación de la oralidad y la expresión escrita.

5. Propiciar, de manera sistemática, espacios que estimulen el trabajo de grupo y cooperativo.

6. Reconocer los valores ejemplarizados diariamente y la aceptación de creación, así como reconocimiento de la singularidad de cada uno de los participantes en el aula.

En síntesis, el aula del "profesor de hoy y del futuro" contará con un modelo activo que permitirá que actúen los estudiantes; establecerá relaciones de cooperación y democráticas, potenciará la creatividad en cada participante, planificará con tiempo el trabajo tecnológico e independiente del estudiante, establecerá un lugar donde exista la igualdad de oportunidades dentro de su diversa e intensa participación en clase.

"El profesor de hoy y del futuro" deberá ofrecer calidad en las acciones de consultoría, tutoría y diálogo académico; a su vez, exigirá la calidad en la oralidad y productos escritos, generará una actitud científica y facilitará el trabajo cooperativo fomentando lo axiológico, lo mental y lo social. Promoverá la comunicación entre sus homólogos y la circulación de reglas claras de desempeño. Ofrecerá apertura a la crítica y respeto a la singularidad. Durante y al final siempre motivará, reforzará, premiará y corregirá en el mismo momento de la actividad, ni después ni más tarde.

En síntesis, le corresponde al profesor:

1. Diseñar la instrucción de manera conjunta con los colegas y estudiantes.
2. Coordinar, facilitar, guiar, asesorar (tutor), inspirar y demostrar.
3. Diseñar y orientar las experiencias de aprendizaje.
4. Diseñar investigaciones conjuntas para que los estudiantes se aproximen al conocimiento científico.
5. Guiar y controlar los trabajos de investigación.
6. Evaluar formativamente antes de calificar y poner nota.
7. Adaptar constantemente actividades de aprendizaje (crea alternativas).
8. Iniciar a los estudiantes hacia la solución de problemas, tanto de carácter cognitivo como actitudinal.
9. Preparar y proporcionar las herramientas de trabajo para ser aplicadas en la práctica.
10. Identificar las necesidades de aprendizaje de sus alumnos.
11. Evaluar el aprendizaje en forma sumativa.
12. Consolidar el aprendizaje.
13. Crear un contexto didáctico, real o virtual, que estimule el entorno pedagógico.

Es decir que la didáctica de la matemática exitosa requiere:

a) Partir de lo conceptual con significado, para posteriormente ir a lo formal (lógica, deductiva) y llegar a lo estructural. Ejemplo: los números con coma (7,5) son números decimales, el de la izquierda de la coma es entero, y el de la derecha, decimal. Hay memoria USB para computadora con una capacidad de 7.5 GB.

b) Mostrar una rica y variada selección de significados apropiados a los estudios según su nivel:

- Inflación 4,7%
- Presupuesto 200.5 millones
- Juan mide 1.90 metros
- Gasto de agua $20.5, etc.

c) Integrar nuevos conocimientos con significados presentes:

- Fenómenos en su contexto, y en las condiciones en que se presentan.
- Diversidad semiótica o de representaciones (conceptos, nociones, propiedades, estructuras, objetivo mental).
- Pluralidad de modelos para cada concepto. Modelización (característica, estructura, resumen, modelo, esquema).

El fenómeno, su relación de causalidad. Si se opera la estructura, se modifica el fenómeno.

d) Trabajo en grupo y permitir a los estudiantes que trabajen a su nivel y con sus propias palabras.

De acuerdo con Stodolsky y Grossman (2000)*[25], los profesores de la educación secundaria (y quizás de la universitaria) tienden a ser fieles primero a su materia o contenido matemático y después, o en segundo lugar, al crecimiento personal de sus estudiantes. Esta situación, por ejemplo, en Estados Unidos con los estudiantes latinos que no dominan el inglés eficientemente. Lo anterior se ha resuelto, no sólo para esta específica situación, sino con todos los estudiantes, siguiendo la estrategia de "trabajando en grupo". Algunos estudios sugirieron que colocar estudiantes en pares o en grupos puede tener resultados positivos. Las situaciones en las que el aprendizaje cooperativo se da, proporcionan oportunidades para que los estudiantes desarrollen tanto las habilidades para escuchar y hablar, como para incrementar su comprensión matemática, e incluso animan a los estudiantes que no vacilen para hablar ante grupos grandes.

El trabajo en grupo ofrece posibilidades para animar a los estudiantes a discutir, explicar, debatir entre ellos las diferentes soluciones a los problemas. Esta estrategia requiere un planteamiento y un entendimiento de lo que se persigue, así como relaciones de liderazgo tanto en la clase como en los grupos.

Otra estrategia que parece efectiva es la de encontrar ayudadores matemáticos, ya sea dentro del aula como afuera: tutores, familia, estudiantes avanzados y socialmente dispuestos.

e) Construir conocimientos previos, por ejemplo: enseñar a sumar bien, antes de comenzar a multiplicar; factoreo antes de derivación.

La matemática es la asignatura que genera dolores de cabeza, prejuicios y rechazos. Muchos estudiantes deciden su vida profesional sólo en función de evitar el contacto con esta ciencia.

Aprender intensamente las potencialidades de la matemática y su utilidad significativa en el entorno del aprendedor, con miras a una mejor calidad de vida en un espacio geográfico determinado, puede ser un propósito de la estrategia de resolución de problemas relevantes, para enseñar la matemática. Por otra parte, la misma estrategia puede convertirse en un cálculo o en un proceso de pensamiento habitual, que se constituya en una competencia para pensar matemáticamente.

MÉTODO PARTICIPATIVO PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

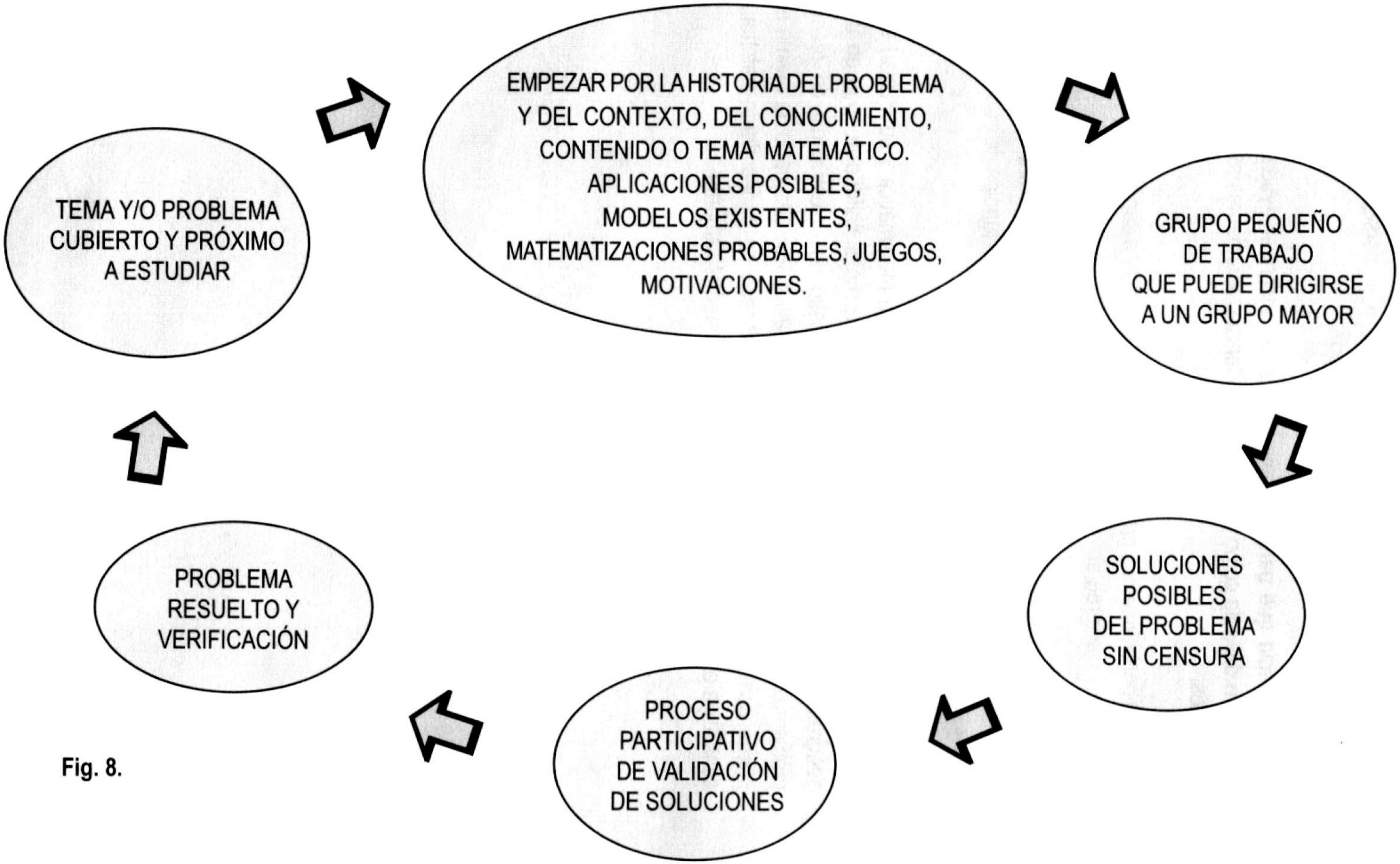


Fig. 8.

El método participativo también tuvo su cimiento en Juan Enrique Pestalozzi (1946-1827), que lo fundamentó en base a la instrucción grupal, la enseñanza mutua, la cooperación y colaboración de cada niño con respecto a los demás. Rubinstein, en los años cuarenta, sostuvo que en la actividad participativa, la personalidad se desarrolla, se forma y se expresa. El método participativo, por tanto, es capaz de desarrollar las potencialidades intelectuales y afectivas de los educandos. El interés, la motivación, la curiosidad, la necesidad deben descubrirse y estimularse para que el estudiante actúe en su proceso de aprendizaje. Otro aporte al método lo expuso L. S. Vigotsky. Su concepción de "la zona de desarrollo próximo" establece lo que el estudiante necesita de apoyo para realizarla, sea esta ayuda del profesor, de un adulto o de sus compañeros. Hay otros autores y corrientes que complementan la actividad participativa en grupo tales como: Lewin, Roger, Cousinet, la escuela de Frankfurt, la psicología social norteamericana y la marxista.

TRABAJO PARTICIPATIVO EN LA ENSEÑANZA

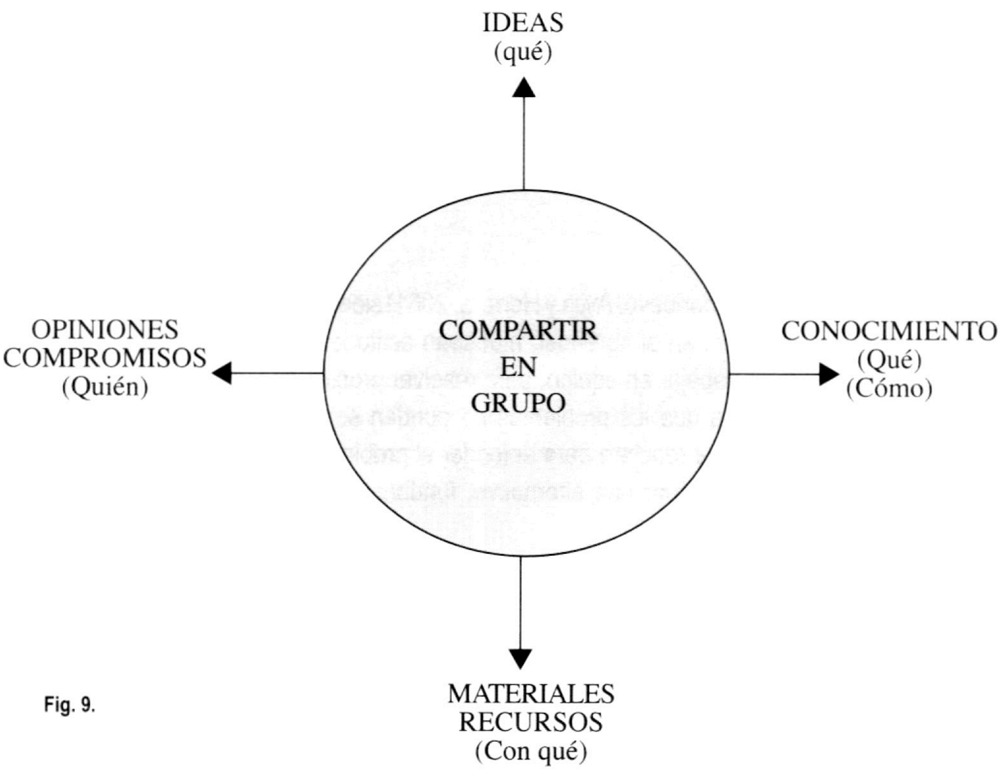


Fig. 9.

El grupo debe organizarse en función de las características del trabajo en grupo, entre éstos encontramos los siguientes:

- Cooperación
- Autoactividad
- Formación social
- Integración social
- Abordar problemas
- Transformar conocimientos
- Valorar al aprender
- Interactuar
- Vinculación
- Aceptar a los demás
- Comunicación
- Decidir

[26]*Los maestros (según Barrionuevo, Ávila y Herrera, 2001) sienten que los estudiantes no tienen interés en los contenidos ni en el aprender, muestran actitudes negativas, tienen dificultades para comunicarse, para trabajar en equipo, para resolver problemas y es poca su creatividad. Cada día es más evidente que los problemas no pueden solucionarse en forma solamente individual, la participación se requiere para entender el problema, buscar datos e información, plantear alternativas, seleccionar una alternativa, fundamentar en criterios e implementar la solución.

La resolución de problemas no es la solución total. Tiene también aspectos que deben mejorar tales como: la selección de problemas no de ejercicios, conocer el método de resolución de problemas en grupo (grupos participativos) y diseñar reuniones de trabajo adecuadas.

En primera instancia, la selección de problemas requiere definir claramente dos situaciones o estudios A y B. Estas pueden expresarse como sigue.
Ver figura 10.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

ESTADO A

ESTADO B

INICIO

FIN

¿De dónde se parte?

¿Hacia dónde se quiere ir?

Lista de elementos

Lista de interacción

A → ¿Cómo modificar la interacción? → B

Imagen
Preposición
Principios
Atributos
Datos
Mapa
Cuadro, etc.

¿Encontrar qué?
Palabra
Imagen
Fórmula
Ruta
Número
Forma
Causa
Origen, etc...

Fig. 10.

Además, en la enseñanza de la matemática hay que distinguir entre el ejercicio y el problema práctico:

DIFERENCIA ENTRE UN EJERCICIO Y UN PROBLEMA

EJERCICIO (COPIARLO ES FÁCIL)	PROBLEMA (DEFINIRLO ES DIFÍCIL)
Requiere un conocimiento previo, pues sin éste se convierte en un →	PROBLEMA
Persigue una habilidad	Promueve la investigación (Hay pasos nuevos y originales)
Puede o no ser de la vida diaria	Está planeado en un contexto
Utiliza un método o un algoritmo preestablecido (un procedimiento) rutinario	Requiere establecer un método o estrategia de solución. (Aproximación, R. Borasi, 1986)
Tiene una solución	Posee un conjunto de soluciones
Hay un camino preestablecido	No hay un camino aparente y obvio, es creación de soluciones
Tiene muchos casos	Casi siempre es único

[27]*George Polya, que se interesa por el proceso de descubrimiento, o cómo se obtienen los resultados matemáticos, advierte de la necesidad de que, para entender una teoría, se debe de conocer cómo fue descubierta. Su enseñanza enfatiza el proceso de aprendizaje por descubrimiento, aún más que simplemente desarrollar ejercicios. Su método de cuatro pasos es el que se presenta a continuación:

Paso 1. Entender el problema

1. ¿Entiendes todo lo que dice?
2. ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
3. ¿Distingues cuáles son los datos?
4. ¿Sabes a qué quieres llegar?
5. ¿Hay suficiente información?
6. ¿Hay información extraña?
7. ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

Paso 2. Configurar un plan

¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final).

1. Ensayo o error (conjetura y probar la conjetura).
2. Usar una variable.
3. Buscar un patrón.
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.
7. Hacer un diagrama.
8. Usar razonamientos directos.
9. Usar razonamientos indirectos.
10. Usar las propiedades de los números.
11. Resolver un problema equivalente.
12. Trabajar hacia atrás.
13. Usar casos.
14. Resolver una ecuación.
15. Buscar una fórmula.
16. Usar un modelo.
17. Usar análisis dimensional.
18. Identificar submetas.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.

Paso 3. Ejecutar el plan

1. Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.

2. Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito, solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que **se te prenda el foco** cuando menos lo esperes!)
3. No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4. Mirar hacia atrás.
1. ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?
2. ¿Adviertes una solución más sencilla?
3. ¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?
Comúnmente, los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada las palabras a una forma equivalente del problema en la que usa símbolos matemáticos, resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta.

Otro enfoque para la enseñanza de la matemática es el que organiza jerárquicamente las competencias por lograr por el alumno, así como las concepciones que tiene éste en el desarrollo a corto plazo en el aula. Organiza las interacciones sociales, los fenómenos inconscientes y la identificación de actos, esquemas y símbolos. Utiliza computadoras para la enseñanza de la matemática. Estudia el pensamiento matemático avanzado, los factores sociales y afectivos, la metacognición ([28]*Capacidad que tenemos de autorregular el propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos y, como consecuencia, transferir todo ello a una nueva situación). Es un grupo realístico consciente de que sólo se pueden estudiar partes específicas del aprendizaje de la matemática, y un proceso específico que podríamos llamar de autoadministración progresiva del aprendizaje, que considera también el entorno social y afectivo del alumno. Es como conocerse a uno mismo, volte-face, saber que no se sabe nada y hacer algo al respecto.

El enfoque sociocultural, creado por Vigotski, estima que las interacciones sociales son la clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se aprende por interacción con el medio, con el profesor, con los símbolos. Todo se convierte en mediador del aprendizaje; el aprendizaje va de afuera hacia dentro y viceversa; de lo interpersonal hacia lo intrapersonal. Utiliza el modelamiento, las contingencias, la instrucción y las preguntas. La mediación transforma la realidad circundante, no imita sus rutinas. Importa, aparentemente, en este enfoque, la interacción de culturas, el estímulo social y la respuesta personal del alumno.

Otro enfoque contemporáneo es el tecnológico. En este enfoque se utiliza mucha tecnología, tal como calculadoras, graficadoras, hojas de cálculo, software especializado para geometría, matemática discreta (estudio de la lógica y teoría de conjuntos), cálculo y los problemas de estrategia. Trata de descubrir cuál estrategia es mejor para resolver un problema; el énfasis está en plantear bien el problema y evaluar bien los mejores cursos de acción. Se combinan muy bien para las decisiones de negocios, el ajedrez y, en general, para resolver problemas con muchas posibilidades y caminos para ganar un juego y resolver creativamente problemas. Cabe mencionar que la evaluación está más centrada en la comprensión matemática, que en el control del proceso de realizar las operaciones, pues éstas son realizadas por las máquinas. Siendo la matemática un recurso para resolver problemas, esta resolución debe tener algún método general, por ejemplo, leer el problema para comprenderlo, enlistar los datos, hacer un dibujo, establecer la meta, desarrollar la ecuación y resolver el problema (hallar la incógnita). Lo actual es enseñar matemática a partir de la realidad, el trabajo en grupo, la creatividad, la innovación, los juegos, los materiales especiales (frecuentemente no costosos) y la tecnología multimedia.

Algunas técnicas exitosas de la práctica en la enseñanza de la matemática son las siguientes:

a) Enseñar no sólo lo general, lo abstracto, no sólo las "verdades o axiomas matemáticos". Hay que enseñar realidades cotidianas.
b) Abandonar la rutina; la presión y apuntar a la aproximación de las realidades diarias de los estudiantes. El horrendo gusano, 0.999999999999999999999999999999999999999999 99999999999, no es más que un simple $\boxed{\bullet}$ =1 (uno) (ENHER Sberger)[*27]
c) Retomar las razones de los estudiantes para interesarlos y no la razón pura de la materia o ciencia matemática.
d) Olvidar mis habilidades, discursos y experiencias matemáticas y promover las competencias, habilidades y experiencias de aprendizaje de mis estudiantes.
e) Enseñar para descubrir el arte hermoso de la matemática, y no para crear matemáticos, que deberán formarse especialmente con una metodología diferente.
f) Evitarse el temor, el miedo y la actitud de que la matemática es difícil, árida y que no sirve para la vida diaria. La vida diaria debe ser fuente para matematizar realidades. Creer que no se tiene habilidad personal es el primer paso para la ansiedad y el bloqueo personal.
g) Los profesores (o docentes) de matemática deben trabajar en conjunto para planear problemas, temas, actividades y recursos para el aprendizaje.
h) El porqué y el para qué se debe aprender matemática es tan importante como validar los resultados encontrados y no sólo el procedimiento o la regla operativa.
i) Esforzarse por darse a entender, parafrasear frecuentemente y recordar que aun entre especialistas a veces el discurso no se entiende, ni a la primera, ni a la segunda.
j) Recordar permanentemente que hay varias formas correctas de resolver un problema, y no necesariamente, es la que el profesor demuestra[*29].
k) Dar a conocer que el esfuerzo personal es más importante que la habilidad innata en el rendimiento del aprendizaje de la matemática.
l) Tratar de enseñar primero el hecho real, después el concepto y por último el símbolo, el icono o el número.[*30]

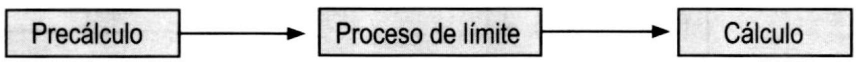
$$\boxed{\bullet} + \boxed{\bullet\bullet} = \boxed{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}$$

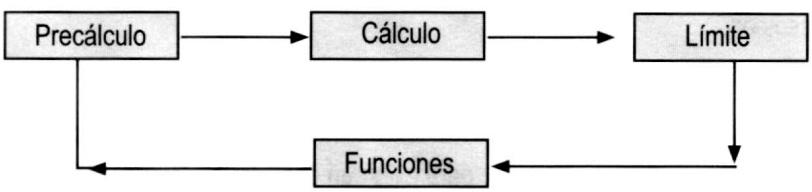
m) Tratar a los alumnos o estudiantes con dignidad y respeto; puede que usted sea superior a él, pero puede que no.

El camino del aprendizaje de la matemática es largo; por tanto, de nada sirve apresurarse en el inicio, más vale una ruta bien escogida y aprendida que equivocarse en el camino y tener que regresar a estudiar lo no aprendido.

La ruta:



Es mejor que



n) El contenido es importante, pero más su actitud para enseñar y el enfoque: lógico, formal, intuitivo, ecléctico, lúdico, real, alegre, afectivo, desafiante, retador, innovador… entusiasta.
o) Ser coherente es fundamental; más vale un programa modesto que uno ambicioso, agobiante y aburrido.
p) Si el estudiante o el profesor se aburre, el fracaso es inevitable. Cambie de estrategia o suspenda el proceso un momento.
q) Evalúe para mejorar el aprendizaje, no para comparar a Juan con Pedro, ni para averiguar lo que no saben, sino para que demuestren lo que saben.
r) Trabajar con competencias profesionales o estándares de contenido y desempeño (realización de un trabajo) y su nivel de logro sin olvidar el contexto en el que se realiza la aplicación y la justificación del para qué o del porqué es importante aprender esta competencia.

TRABAJAR BUSCANDO COMPETENCIAS

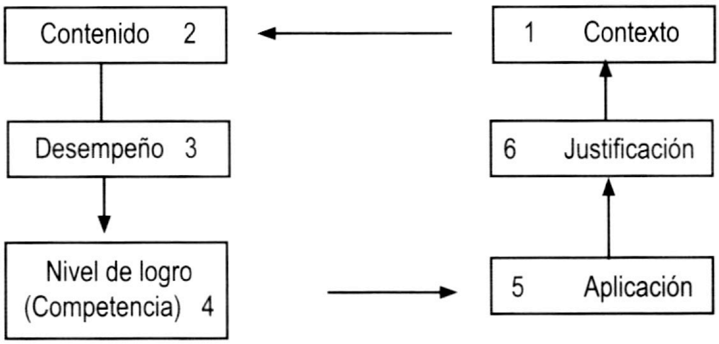


Fig. 11.

El siguiente puede ser un ejemplo ilustrativo:
La competencia es calcular probabilidades al observar fenómenos de la naturaleza clasificando los sucesos en:

a) seguros
b) posibles e
c) imposibles al realizar experimentos, para evitar un desastre en la comunidad "A".

EJECUCIÓN Y LOGRO:

- Reconocer fenómeno natural: el desastre.
- Reconocer situación del contexto de la comunidad "A".
- Estimar ocurrencias de las situaciones.
- Identificar sucesos seguros, posibles e imposibles.
- Clasificar sucesos.
- Realizar experimento "B".
- Aplicar mejor acción o estrategia factible.
- Calcular probabilidad de ocurrencia en la situación de la comunidad "A" y en el experimento "B".

Nivel de logro: Subrayado.

El ejemplo anterior sirve para enfatizar que hay que ir más allá de la actividad o función que realizará el estudiante, ir más allá del simple procedimiento; se requiere inventar, identificar el contexto, la aplicación, la justificación o el para qué del aprendizaje. Con esto, el interés, el desafío, la motivación se encenderán y el aprendizaje será vívido e intenso. La tabla siguiente muestra conceptos sinónimos en la construcción de competencias y un ejemplo sintético más.

SINÓNIMOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE COMPETENCIAS

CONTENIDO	DESEMPEÑO	LOGRO	CONTEXTO
Noción Concepto Ley Teoría Axioma Teorema Regla Procedimiento	Actitud Realización Actividad Trabajo Cargo Función Ejecución Conducta Acción	Norma Patrón Referencia Evaluación Deber objetivo Nivel de Rendimiento.	Justificación Aplicación Condiciones Entorno Medio de trabajo Tecnología Ambiente Hardware Software
Algoritmo	Aplicar a la división de números naturales con dos cifras.	Dividir con dos cifras números aun naturales.	Repartir tareas a un grupo de trabajo.

Fig. 12.

Otra estrategia posible para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la matemática, es revertir el sentimiento o creencia del estudiante que no entiende, etc., mediante lo que podríamos llamar una terapia del éxito inicial, que consiste en garantizar el éxito desde el principio, de tal manera de desbloquear pensamientos negativos del estudiante. En general, podría decirse que la suma de éxitos iniciales conduce al éxito posterior y a la confianza de poder aprender aspectos cada vez más complejos. Por lo contrario, un fracaso más otro fracaso, más otro fracaso dan por resultado un fracaso total.

$E_1 + E_2 + E_3$ = Éxito posterior (Secuencia de éxitos)
$F_1 + F_2 + F_3$ = Fracaso total (Secuencia de Fracasos)
E = ÉXITO
F = FRACASO

La rapidez del aprendizaje de la matemática en función de la perspectiva-visual en niños, es recomendada. Pero la enseñanza de la matemática icónica, simbólica, teorética, formal y procesal, debe llevarse a cabo en construcciones naturales, al ritmo de aprendizaje de cada estudiante (lo cual hoy es posible con la computadora y software especializados) y, sobre todo, con la consigna: "No pase a un nuevo conocimiento sin dominar bien el antecedente de base". No se puede dividir sin saber restar. Lo anterior debe ser previsto antes de comenzar a enseñar, pues, también es cierto que hay en los planes de estudio, frecuentemente, prerrequisitos inexistentes y artificiales que con un concepto de unidad (módulo) se pueden obviar.

En la enseñanza hay que consolidar lo que se aprende, explicar dos y tres veces (aunque no sea académicamente elegante); explicar las tareas, no dejar los ejercicios largos y difíciles para el trabajo exaula considerando que un tropiezo fuera del aula deja sin ningún auxilio o sin poder preguntarle a nadie cómo continuar.

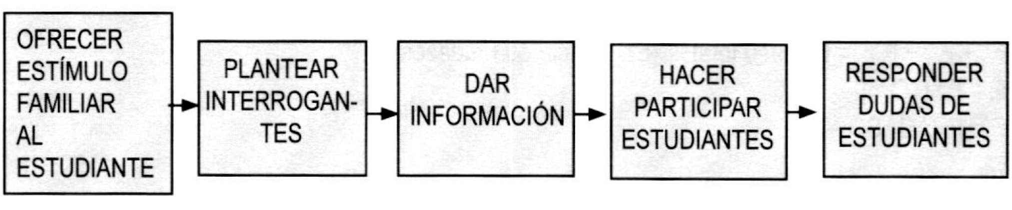
La enseñanza requiere realizar la labor alegremente; si se es enojado, el daño a los demás y a sí mismo, es irreparable. Si la tarea no nos gusta, si enseñar no es nuestra pasión, lo mejor es buscar otra profesión.

Otros consejos más, dados por entendidos son:

1. No se fije sólo en su asignatura, mire también cómo la enseña, y en las que tiene a la par.

2. Para captar el interés del estudiante tenga en cuenta:
   Utilidad del contenido.
   Explique el para qué.
   Utilice el éxito inicial.
   El trabajo en grupo.
   El desafío.
   La práctica en laboratorio.
   La simulación de hechos reales.
   Busque ejemplos y analogías actuales y significativas para los estudiantes, no de revoluciones no vividas.

3. El proceso exitoso*[31] planteado por Klausmeier y otros. (1973). Aconseja proceder de la manera siguiente:



4. Lo lúdico es importante para atraer la atención del estudiante, siempre y cuando tenga relación con lo que se aprende. Lo anterior quiere decir que el humor no es para entretener a los estudiantes, sino para aprender. Es mejor, se dice, entretener para aprender, que enseñar para sólo entretener y no aprender.

5. El cerebro no permite a los estudiantes registrar un flujo continuo de datos. La información debe ser procesada (digerida, tratada) para darle sentido y que sirva para construir estructuras cognitivas. Aprender es complejo, y enseñar, también. El conocimiento es información relativamente estática, se aumenta con el estudio, se evalúa en función de su verdad, se trasmite y es reconocible cuando está estructurado. Las habilidades, por otro lado, se refieren a la actividad, desempeño, ejecución; se evalúan en función de la eficacia, se desarrollan con la práctica y se pueden convertir en automáticas.

Técnicas de enseñanza exitosa son las siguientes:
- Descripción
- Interpretación
- Explicación
- Analogía
- Ejemplos
- Graficación, cuadros, tablas, esquemas
- Preguntas, interrogatorio
- Paradoja, adivinanza
- Modelos
- Suposición, hipótesis, conjetura
- Intuición, imaginación
- Verificación científica, experimento, laboratorio.

Todos los propósitos, enfoques, estrategias y técnicas para mejorar el proceso de enseñaza-aprendizaje, deben ayudar a crear no sólo una nueva matemática aplicada en sus variados niveles, sino fundamentalmente una nueva práctica de la enseñanza que no aburra, ni espante, ni frustre a nadie. Tanto estudiantes como docentes deben enfrentar las tareas de enseñar y aprender en forma agradable la matemática y, de esta manera, acercarla a todos los mortales.

A continuación, un ejemplo de diseño de reuniones de trabajo en grupo para resolver problemas de matemática.

EJEMPLO DE UN DISEÑO DE REUNIONES DE TRABAJO.

1. OBJETIVOS.
   1.1. Trabajar en grupo en la resolución de problemas.
   1.2. Resolver problemas seleccionados de un contexto particular y de interés humano.

2. SELECCIÓN DE PROBLEMAS.
   2.1. Calcular ingresos ($) de una empresa en dos escenarios posibles.
      2.1.1.1. Situación de baja inversión por inseguridad jurídica.
      2.1.1.2. Situación de alta inversión debido al alza de materias primas de exportación.
   2.2. Determinar el crecimiento de un cultivo de bacterias, conociendo su función de crecimiento en gramos y horas.

3. EJEMPLOS DE TEMAS.
   3.1. Integrales.
   3.2. Funciones exponenciales.

4. DESARROLLO.
   4.1. Formación del grupo.
   4.2. Familiarización.
   4.3. Determinación del tiempo y conocimientos previos.
   4.4. Exposición breve de conocimientos previos.
   4.5. Discusión y aclaraciones/supuestos.
   4.6. Organización del grupo: secretario, moderador (rotativo para cada problema).
   4.7. Desarrollo del proceso, método o procedimiento.

5. VALIDACIÓN DE RESULTADOS Y REFLEXIÓN FINAL.
   Comprobar las soluciones obtenidas o resultados alcanzados redondea el aprendizaje y proporciona una nueva oportunidad de comprobar éstas con la realidad, este paso es muy importante y no debe olvidarse nunca.

6. EJEMPLOS DE MATEMÁTICA REALISTA.
   A continuación inserta algunos ejemplos que pueden ser aplicados a diversos niveles, dado que este material es para cualquiera que enseñe en primaria, secundaria o universidad.

   El principal recurso con el que debemos contar para intentar crear una nueva forma de enseñar matemática es la realidad. Datos de la realidad que nos acerquen a la misma y con los cuales podemos crear modelos, estimaciones y aproximaciones, para ir dando paso a una matemática creativa, que se ha ido olvidando por las otras orientaciones vistas en la primera parte de este trabajo. El dr. Claudi Alsina Catalá*[13] propone como ejemplo, los siguientes problemas extraídos de la realidad.

Utilizar el código ISBN que es un identificador único para libros de 10 dígitos: d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, C; 9 dígitos informativos y 1 de control. La longitud de los 10 dígitos está dividida en cuatro partes, 1 de código del país, 2 ó 5 el editor, 3 3l número de la publicación y 4 en dígito de control. Cada parte tiene distintas longitudes y están separadas con guiones o prefijos. El dígito de control C se calcula de forma que 10 d_1+9d_2+8d_3+... 2d_9+C sea múltiplo de 11.

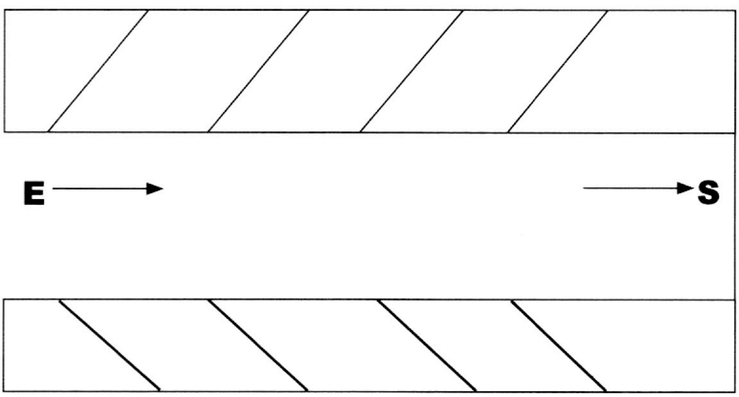
Muchas aplicaciones de ecuaciones algebraicas pueden realizarse calculando C para diferentes ISBN, por ejemplo:

Busque C para el ISBN 0-7167-1830-C
Existen otros códigos compatibles con los códigos de barra como ISBN de trece dígitos y el más universal el EAN (Código de barra), el cual codifica monedas, precio de venta, etc... los cuales utilizan diferentes formas de calcular el dígito de control.

La idea es utilizar el mundo real para matematizar tarjetas de crédito, códigos comerciales, placas de automóviles, habitantes, etc.

En textos holandeses que utilizan las ideas de Hand Freudenthal, por ejemplo, para estimar la superficie del cuerpo humano de una persona determinada crea el modelo siguiente:
¿Área del cuerpo?
Modelo: Estatura en (cm.) x circunferencia del muslo en cm. x2
= Área del cuerpo
Otro ejemplo:

Diseñar las medidas del rectángulo señalado, un estacionamiento para autos.



LADO
ALTURA
ÁREA
¿Qué autos?
¿Cuánto miden?

¿Hay entradas?
¿Hay salida?
¿Cuál será el espacio de circulación?
¿Cuál será el espacio de margen?

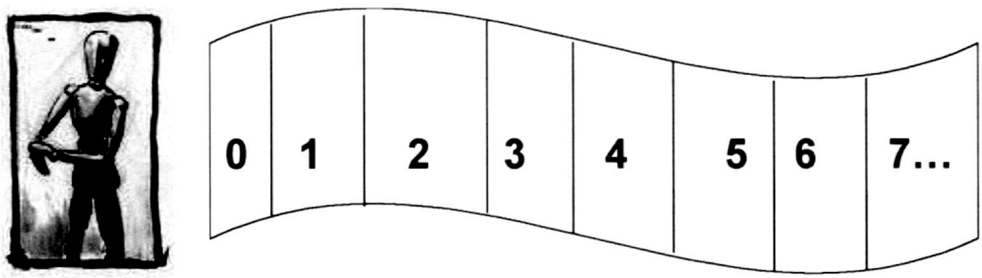
La matemática realista es trabajo con datos reales, para no perder la realidad misma. El enseñarte, por tanto, debe contextualizar sus ejemplos sea ésta una realidad rural o urbana. Alsina[13] propone otros ejemplos tales como: ¿Cuántas variables intervienen cuando se tira un penalti? ¿Cálculo de coordinadas en un punto determinado? En todo caso es importante reconocer que como dice H. Freudenthal: "Guiar es llegar a un balance delicado entre la fuerza de enseñar y la libertad de aprender".

Otros ejemplos impregnados por esta corriente o filosofía de la matemática realista, los encontramos en los materiales utilizados por GPDM, entre los cuales tenemos los siguientes: [32]*(Matemática realista-GPDM- Grupo Patagónico de Didáctica de la matemática.) http://www.gpdmatematica.org.ar

Fernando Gallego y Ana Besson del GPDM proponen situaciones referidos a trayectos y desplazamientos que dan lugar a bandas numéricas:

- Dinámicas horizontales: Personas, animales, autos, fichas en juegos de dados que requieren desplazamiento.
-

"Deben comenzar en 0"



- Dinámicas verticales: Escolares, tareas con cubos, ascensor.

....
7
6
5
4
3
2
1
0

"Deben comenzar en 0"

-Tradicional “Estadística”. Comienza en 1 (ligándola a contar) para leer y escribir números. Si se la utiliza dinámicamente, genera confusión, pues efectivamente n-1.

Las actividades que plantean los creadores incluyen: contar la sucesión en tiras de 10 números cada una. Generar dos tipos de tabla de 0 a 99 ó de 1 a 100. Cada tabla objetiviza distintas propiedades, dígitos, familias de 10, del 20, etc. La otra muestra una centena, relaciones del sistema, etc. Actividades propuestas son, por ejemplo, señalar docenas, uno más 35; una menos 44, números que terminan en 3; las que empiezan con 5, días de una semana, los que la suma de sus cifras es 10, etc. Incluye adivinazas: Soy de la familia de 20 y termino en 8; soy mayor que 49 y menor que 51; soy vecino de 40; soy el siguiente de 59, etc. Pueden hacerse rompecabezas, imaginar tablas, números que se parecen o se diferencian, tablas que les faltan números etc, etc. tablas circulares, etc.*[33]

Betina Zolkower, del grupo GPDM, utiliza imágenes para matematizar, por ejemplo, la falta de un cuadrado formado por 5 hileras de ladrillos de construcción, que constituyen una escultura del museo de Long Island city, Queens, NY. Pregunta: ¿Cuántos ladrillos hay?, ¿Qué dimensiones tiene la construcción? ¿Cuál es el volumen de ladrillos? ¿Qué volumen ocupa la construcción? ¿Cuánto pesa? ¿Cuál es el perímetro? etc. etc.

Otro ejemplo más es la utilización de una fotografía de una cámara fotográfica, que tiene de fondo un edificio en el que se distinguen ventanas, azulejos, niveles, etc. Le sirven para preguntar: ¿Estará a escala la cámara fotográfica? ¿Se puede estimar el tamaño, comparando con una ventana del edificio? ¿Estimar la altura de un país? ¿Qué formas geométricas se ven? ¿Cuántos azulejos entran por m^2? ¿A qué altura está colocada la cámara? No estando la máquina en el mismo plano de la ventana ¿es lícito tomar ésta como referente para estimar las dimensiones de la máquina? Continúa con problemas…

Todos los ejemplos anteriores encuentran la matemática en aspectos extraídos de la realidad, y si esa realidad le interesa al aprendedor, mas potenciará el aprendizaje. Por ejemplo, para la enseñanza de la estadística pueden generarse listas de cámaras digitales, sus precios y especificaciones técnicas tales como resolución máxima, tipo de memoria, tamaño del lente, tipo de “zoom”, fuente de poder, peso, tamaño, etc.

Otro ejemplo es utilizar, como lo propone Fernando Gallego y Ana Bresson, el calendario para captar relaciones temporales, relaciones de distancia, tiempo; comparar intervalos, calcular cantidad de días, etc. Los autores realizan todas las actividades con datos reales y los recursos son ilimitados, si nos proponemos buscarlos y utilizarlos. Enseguida propongo recursos encontrados que pueden facilitar esta labor.

V. RECURSOS PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA.

Los recursos y materiales por utilizar deben dar sentido al objeto mental, concepto contextualizado, matemático, a la estructura, características, propiedades, fenómenos, relaciones y análisis, en el orden sugerido.

Poner las manos sobre los objetos, materiales, PC, modelos, etc., y manipularlos o manejarlos proporciona significados al aprendizaje.

En la educación, desde hace mucho tiempo, se han utilizado cruces, banderas, llantas, paraguas, cajas, etc., para enseñar matemática. Es una lástima que ya no se usen tanto y que se quiera solamente utilizar la comodidad del pizarrón, que no tiene ojos, ni cara, ni pregunta y aguanta con todo. No se trata de no usarlo, se trata de que, si se usa, usarlo bien, en forma dinámica y para avivar la imaginación. Una pizarra es igual que una pantalla, ya sea de lona, o de una PC. La diferencia es el menor tamaño; pero, si es ágil, bien distribuida y con los recursos de multimedia, tenemos que admitir que en la actualidad hay recursos de matemática en Internet, tales como www.redemat.com con novedades para todos los niveles. Además, están las siguientes posibilidades para explorar:

Paquetes de matemática simbólica para PC, tales como:

- Maple 11, para enseñar, investigar, aprender a modelizar y, simular problemas para diferentes áreas profesionales. Puede adquirirse al afiliarse como miembro, o directamente a los programas, en la dirección www.maplesoft.com.

- Mecanismos tutoriales en los que se demuestra que el juego libre, relajante, liberado, serio, de catarsis, de amistad, de reglas, de orden, de vida, ritmo y armonía, puede ser un recurso inagotable para enfrentar la matemática con espíritu explorador.

  Los tutores brindan a los estudiantes una ayuda directa y, según sus necesidades de consulta, con el objeto de aclarar dudas que surgen durante el proceso de aprendizaje. Existen ya los tutores inteligentes en PC e Internet.

Internet es una solución al problema educativo. Al igual que la radio, la televisión y las computadoras, apoyan cada día más y mejor a la educación en general y a la matemática en particular. Lo sorprendente es la velocidad, el bajo costo por ser masivo, los programas gratuitos, los foros de discusión, los videos de conferencias, las bibliotecas virtuales, la cantidad de páginas sobre todos los temas y la multimedia incorporada, entre otras ventajas. Está aquí, es de relativo bajo costo y se quedará para siempre. [34]*Sánchez. (2000), indica que la Internet puede hacer más pertinente, activo y moderno el aprender. Se requerirá para su uso óptimo tener la tecnología, capacitar a los profesores, diseñar o "aprovechar las experiencias pedagógicas", sin olvidar el entorno para el cual formamos. Profesores menores de treinta años son más afines a utilizar Internet que los profesores precomputacionales.

El constructivismo, que se centra en el estudiante, en la materia, temas o programas prescritos, es más efectivo en el trabajo con Internet. Toda la acción y la construcción tienen como centro el aprendiz. Por otra parte, se dice que los profesores buscan información para sus clases y escasamente utilizan Internet para comunicarse con otros profesores e intercambiar experiencias y recursos [35]*(Mendels, 2000). Este último aspecto reviste una importancia futura que hay que considerar como muy promisoria.

Es necesario también utilizar Internet "en el aula y durante la clase", y las páginas Web propias o descubiertas. Esto requiere conexión de Internet inalámbrico en el salón de clase, en los laboratorios, en el campus, y quizás en el futuro, en todo lugar. A mayor ubicuidad mayor posibilidad de aprender. Cabe mencionar que, cada día, más profesores tienen Internet como recurso pedagógico. (Owston, 1997). Y también es triste saber que los profesores de matemática son los que menos usan Internet, [36]*(Becker. 2000). Los profesores líderes son los que más utilizan Internet, por lo que hay que trabajar más en ellos, para ampliar el uso de ese potencial recurso.

Se estima que, para el buen uso de Internet para fines pedagógicos, se requiere una capacitación sistemática y prolongada (dos años como mínimo) para un uso educativo e integrado al currículo.

Los recursos didácticos, desde el cubo de madera, la cartulina, una pizarra con novedosas ideas, un cartel o Internet, deben de servir para una enseñanza imaginativa, no sólo reproductora, y estos recursos deben integrarse al aula y al currículo.

Recursos en Internet hay muchos, por ejemplo en, las páginas que siguen se mencionan algunos:

1. MathCad. Herramientas para ingeniería, educación y empresas. Ofrece editores para ecuaciones, paquetes para cálculo, software especial para estadística, inteligencia de negocios, graficadores, etc. disponibles en versiones en español sugerido en Wikipedia*[37]. Se dice que es un programa algebraico de computadora similar a Mathematica, distribuido por Mathsotf. A diferencia de Mathematica, MathCad es más intuitivo de usar, permite la aplicación de plantillas funcionales en las que sólo es necesario escribir los valores deseados, incluso para graficar funciones.

Algunas de las capacidades matemáticas de MathCad están basadas en parte del código del programa algebraico Maple (Núcle MathSoft de Maple o Mathsoft Kernel Maple, MKM). MathCad se encuentra organizado como una hoja de trabajo en la que las ecuaciones y expresiones se muestran gráficamente como simple texto.

Dentro de las capacidades de MathCad se encuentran:

- Resolver ecuaciones diferenciales con varios métodos numéricos.
- Graficar funciones en dos o tres dimensiones.

- El uso del alfabeto griego (letras griegas mayúsculas y minúsculas).
- Cálculo de expresiones simbólicas de un sistema de ecuaciones.
- Encontrar la gráfica (la curva de tendencia) de un grupo de datos.
- Implementación de subprogramas.
- Encontrar raíces de polinomios y funciones.
- Funciones estadísticas y distribución de probabilidad.
- Encontrar eigenvalores o autovalores y eigenvectores o autovectores.

2. Mathematic. Lecciones de matemática con un enfoque lúdico. http://math.rice.edu

3. Cynthia Lanius. Presenta enlaces de muchas páginas Web de y para la enseñanza matemática.

4. The math utilities. Es una página que contiene muchos enlaces para diversas utilidades matemáticas. Las colecciones de subprogramas están escritas por brillantes matemáticos y científicos de la computación. Incorporan algoritmos y técnicas para optimizar rutinas y así alcanzar velocidad y precisión. http://www.akiti.ca

5. Complot. Software para gráficas, mapas y dibujo técnico.

6. Guías de trabajo. http://www.galeon.com
Guías generales de trabajo tales como: CEINTE, CNC Chemedia, matemática de Mario, Chilemat. El tutor de matemática, enlaces de matemática, Gacelilla matemática, Links de matemáticas, Todo matemática Yahoo en español: matemáticas, etc.

7. Educar, portal educativo del Estado argentino para compartir artículos con interesados en los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. http://fractus.mat.uson.mx

8. Red Maestro de maestros. http://www.rmm.cl. El método de cuatro pasos de Pólya.

9. ALEA. Acción Local de Estadística Aplicada. (Portugués) http://alea-estp.ine.pt. Contribuye con elaboraciones e instrumentos para la enseñanza de la estadística. Contiene nociones, juegos, etc. (pt=Portugal).

10. Centro de Recursos Virtuales de Matemática. http://www.apena.rcts.pt. Matematicando problemas, foros, materiales, páginas y contactos.

11. O Mocho. http://www.mocho.pt. Portal de enseñanza de ciencia y de cultura científica. Es una página con muchos recursos para la enseñanza de la matemática divertida. http://www.reniza.com. Desafíos matemáticos, bibliografía, foros, novedades. Inscripción gratuita.

12. American Mathematical Society. http://www.ams.org. Portal con herramientas, novedades, conferencias, base de datos de matemática.

Otras interesantes páginas Web:

13. Asociación Portuguesa de Matemática. http://2.apm.pt.

14. EEVL. Enhanced and Evaluated Virtual Library. Servicio gratuito que da acceso a toda la información disponible en Internet en las áreas de ingeniería, matemática y computación. http://www.eevl.ac.uk.

15. EMS. European Mathematical Society, para la promoción e investigación de la matemática. http://www.emis.de.

16. Intermath. Dictionary. Diccionario interactivo para el aprendizaje de la matemática. http://www.intermath-uga.gatech.edu/dictnary.

17. Math Archives. Recursos para matemática. http://archives.math.utk.edu.

18. http://www.esec.pt.

19. Fundación Gabriel Piedrahita Uribe. http://www.eduteka.com. Tecnologías de información y comunicación para la enseñanza básica y media. Es un portal educativo gratuito actualizado quincenalmente desde Cali, Colombia. Contiene estándares, proyectos, herramientas, artículos, reseñas, entrevistas, investigaciones, libros y fragmentos, editoriales, agenda, directorio, archivo.

20. http://www.softonic.com. Software para ciencias, administración, etc. Reseña de software.

CONCLUSIÓN

En la actualidad, el problema de la enseñanza de la matemática no ha sido resuelto en nuestros países de la región, por lo que cualquier intento para mejorar dicho proceso es plausible. El tratar de determinar contenidos de matemática para cada nivel del sistema educativo, corresponde a los expertos y profesores, que deben tener muy en cuenta que se trata de formar una cultura matemática para todos, una democratización de la matemática básica, y dejar a un lado la parálisis académica de seguir enseñando lo mismo que hace 50 años, con un nuevo enfoque para formar matemáticos puros y para crear matemática o alcanzar el estado actual del arte matemático. En el sistema educativo hay que intentar ponerse en los zapatos de los alumnos, qué piensan éstos, de sus conocimientos (que tienen que ser sin ningún error para que no se manifiesten después en aprendizajes más avanzados). La matemática debe ser enseñada para el largo plazo. Hay que enseñar la percepción, la acción, el experimento; enseñar los procedimientos y la utilización de los símbolos en el cálculo... El enfoque realista de la matemática debe consistir en enseñar a matematizar horizontalmente (de la realidad al lenguaje matemático), que no es fácil, pero es el gran desafío del futuro. Enseñar es aprender.

El déficit principal en la enseñanza de la matemática es el método de aprendizaje.

[38]*(Alan Natapoff, físico asesor de la NASA). "Enseñar y aprender matemática es difícil únicamente porque no sabemos cómo hacerlo. Por tanto, el cómo enseñar es una solución. La matemática llamada moderna atenúa la matemática intuitiva, sobre todo la matemática especial. Hoy se reconoce la necesidad ineludible de la misma. La matemática especial puede ser la matemática útil en las diversas profesiones.

La matemática se orientó hacia el formalismo, hacia el rigor y huyó de la intuición en su construcción y, principalmente, en su aprendizaje.

La matemática trata de contar, contar es inevitable. Todos contamos, por eso es importante que todos adquiramos una cultura matemática básica, especialmente para nuestra profesión; eso es una matemática especial.

La matemática que se enseña es rutinaria y memorística, el estudiante no sabe nunca el para qué, ni el porqué. La enseñanza tiene que cambiar. Hay máquinas, hay realidades, hay matemática en todo y para todos, todos la necesitamos, todos debemos aprenderla.

En síntesis, hay que iniciar un nuevo proceso para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Múltiples estrategias pueden seguirse, lo importante es un movimiento inicial para empezar hoy.

GLOSARIO

APRENDIZAJE: Es el proceso de adquirir conocimiento, habilidades, actitudes o valores, a través del estudio, la experiencia o la enseñanza. Dicho proceso origina un cambio persistente, medible y específico en el comportamiento de un individuo y según algunas teorías.

ALGORITMO: Conjunto de reglas bien definidas para la resolución de un problema.

CUATERNIONES: Puede concebirse como similar al sistema de números.

CRIPTOGRAFÍA: Arte y ciencia de cifrar y descifrar información utilizando técnicas matemáticas

ENSEÑANZA: Acto que realiza el docente para apoyar o facilitar el aprendizaje del alumno, utilizando métodos, procedimientos, estrategias, técnicas y recursos específicos. (IESALC)

ELÍPTICAS: Son curvas elípticas definidas mediante ecuaciones cúbicas (de tercer grado).

ICONO: Viene de la palabra griega eikon significa: imagen o representación de cualquier tipo. Cualquier objeto que represente a otro es un eikon. Wikipedia.

INFINITUD: Cualidad de infinito. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.

JUEGO: Es una actividad recreativa que involucra a uno o más jugadores/ Ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual, se gana o se pierde.

MATEMATIZACIÓN: Es el proceso de construcción de un modelo matemático.

MODELIZACIÓN O MODELADO: Es el proceso científico mediante el cual se construye una representación o modelo científico de la realidad. Tiene el propósito de servir de base para la puesta a prueba de las hipótesis con las que se ha construido el modelo y mediante el método científico acceder a un mayor conocimiento del sistema bajo estudio.

SÍMBOLO: Se le llama a un signo sin semejanza ni contigüidad, sino solamente con un vínculo convencional entre su significante y su denotado, además de una clase intencional para su designado.

VOLTE-FACE: Es un cambio total de la posición, como en la política o la opinión, una media vuelta.

ZONA DEL PRÓXIMO DESARROLLO: Es el espacio o diferencia entre las habilidades que ya posee el alumno y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más competente.

BIBLIOGRAFÍA

[1]*Enciclopedia de las Matemáticas. I. M. Vinogradov. Editorial MIR. Moscú 1993.

[2]*Historia de las Matemáticas. K. Ribnikov. Editorial MIR. Moscú 1974.

[3]*Rigoberta Menchú. Fragmento de contenido del discurso en la recepción del premio Nóbel de La Paz.

[4]*Acuña Nelci, Noemí. 2004."Estudio de las metáforas en algunas teorías matemáticas del siglo XX. Tesis de Maestría".

[5]*Carlos Ivorra Castillo. Curvas elípticas. www.uv.es/~ivorra/Libros/Elipticas.pdf

[6]*Diccionario Enciclopédico Quillet, Grolier. Edit. Cumbre, S.A. México. 1981.

[7]*Rodrigo Ferrer, Monografía. rferrer@cable.net.co. Kant y la crisis de las Matemáticas en la actualidad, copyright © 2006.

[8]* Peter Atkins. El dedo de Galileo. Espasa Calpe – 2003.

[9]* Blanché, Robert. La Axioma, Fondo de Cultura Económica. México. 2002.

[10]*Lewin, Renato A. Teoría Axiomática de Conjuntos. Universidad Católica de Chile, Facultad de Matemáticas. Versión preliminar. (2000).

[11]*Richard Courant. 1541. ¿Qué es la Matemática? Fondo de Cultura Económica de España. 2003.

[12]*Larson/ Hostetler/Edwards. Cálculo. 5ª. edición. McGraw-Hill. México. 1995.

[13]*Claudi Alsina Catalá. XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de Matemática. España. 2004.

[14]*Manual Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Enrique Castro (Editor). Síntesis Educación. Madrid, España. 2001.

[15]*Popkewitz, American Educational Research Journal Spring 2004. Vol. 41, Nº. 1. pp. 3-34.

[16]*Abarca Abarca, Sadith P. Método de enseñanza de resolución de problemas en el aprendizaje de la matemáticas. www.monografias.com.

[17]*García Cruz, Juan A. "Didáctica de la matemática. Una visión General" 2001. España.

[18]*Consulta a 100 estudiantes de Nuevo Ingreso de la Universidad Tecnológica de El Salvador. Enero 2007.

[19]*Seymour, Sarason. The Predictable Failure of Educational Reform. San Francisco, Jossey-Bass. 1990. El Fracaso Predecible de la Reforma Educativa.

[20]*Carol Ann Tomlinson. Biblioteca para actualización del maestro. Sep. México. 2003.

[21]*Urbina, Santos Ramírez. Informática y Teorías del Aprendizaje. Revista Píxel-Bit. Nº. 12. Enero 1999. Universitat de les Illes Ballears.

[22]*K. Gravemeijer, "Hans Freudenthal. Un matemático en didáctica y teoría curricular". J. Currículo Studies. 2000. Vol. 32, Nº. 6.

[23]*Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria la universidad. (Tesis doctoral) Universidad de Valencia. Valencia.

[24]*Adrianus de Kock. Review of Educational Research. Summer. 2004, Vol. 74, Nº. 2.

[25]*American Educational Research Journal. Winter 2002. Vol. 39. Nº. 4. Rochelle Gutiérrez University of Illinois at Urbana-Champoing pp. 1049.

[26]*Guadalupe Vadillo y Cynthia Klingler. Didáctica McGraw-Hill. México 2004. (Citan a Barrionuevo. 2001. Integración de las ciencias. Buenos Aires. Argentina. Edificio La Colmena.

[27]*Pólya George. Cómo plantar y resolver problemas. http://rmm.cl.

[28]*Carlos Dorado Perea, cdorada@pie.xtec.es. Universidad Autónoma de Barcelona. Aprender a aprender.

[29]*Shoenfeld. 1992. American Educational Research Journal. Vol. 35. Number2. Summer 2001.

[30]*Glenn Doman, Janet Doman. Cómo enseñar Matemática a su bebé. Diana. México. 2001.

[31]*Michael Saint-Onge. Yo explico pero....ellos ¿aprenden? SEP. México. 2001.

[32]* Matemática realista -GPDM- Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. http://www.gpdmatematica.org.ar

33* Boves, Sandra P. Place value. A vertical perspective Teaching Children Mathematics. Vol. 1. Nº. 919 95. p. 542-546 DICKSON, L. y otros. El aprendizaje de las matemáticas. ED. Labor 1991.

34*Sánchez, J. Usos educativos de Internet. Revista Enlaces. 1999.

35*Mendels, P. Making the most of the internet's potential for education, New York Times, 2000.

36*Becker, H. J. Internet Use by Teacher. Irvine, CA. Teaching Learning and Computing. 2000.

37*Wikipedia. Enciclopedia libre. La más grande enciclopedia construida en forma colaborativa en Internet.

38*La Prensa Gráfica. Cultura, martes 22 de agosto del 2006. Alan Natapoff, físico asesor de la NASA. Entrevista.

FE DE ERRATA

Página-Párrafo	Debe ser (cambios en texto señalados con **azul**)
3 - 3	quien me **impulsó** a
3 - 3	quien me **aportó** buenos comentarios
4	**Matemática**-Estudio y enseñanza 2. Matemática-Enseñanza 3. Filosofía de la **matemática**. I Título Propuesta para **que** nadie se frustre
5 - 5	El Dr. H.C. **e** Ing.
5 - 6	de la matemática, **aunque** no les guste;
6 - 1	con la realidad, para **que** tenga
20 (diagrama)	**Pitágoras**
33 - 3	la evaluación es de muchas maneras. **En** definitiva
35 - 2	(muy dificultoso de enseñar por cierto) de superficie**,** área y perímetro desde primara
61 - 2	10, etc. Incluye **adivinanzas**: Soy de la familia
70 - 7	Comprensión por los estudiantes desde primaria **a** la universidad